बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन हेतु ऐतिहासिक पहल ...

शेखावाटी मिशन 100

2026

(कक्षा 12)

गणित

विभिन्न विषयों की नवीनतम बुकलेट डाउनलोड करने हेतु टेलीग्राम QR CODE स्कैन करें

पढ़ेगा राजस्थान

बढ़ेगा राजस्थान

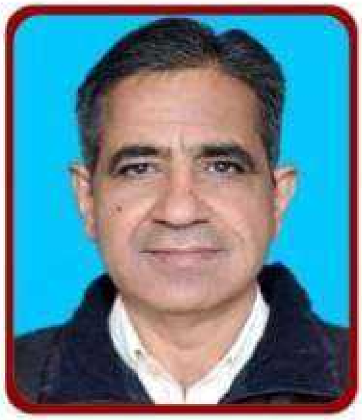
कार्यालय: संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राज.)

संयोजक कार्यालय - संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरू संभाग, चूरू

शेखावाटी मिशन - 100 मार्गदर्शक

संगीता मानवी

संयुक्त निदेशक (स्कूल शिक्षा)
चूरू संभाग, चूरू



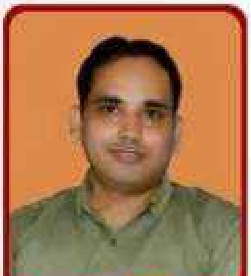
महेन्द्र सिंह बड़सरा

संभागीय कॉर्डिनेटर, शेखावाटी मिशन 100
संयुक्त निदेशक कार्यालय, चूरू संभाग, चूरू

रामावतार भदाला

तकनीकी सहयोगी शेखावाटी मिशन 100

संकलनकर्त्ता टीम : गणित



निखलेश गौड

(उपप्राचार्य)
रा.उ.मा.वि. टाटनवा
धोद (सीकर)

नरेश कुमार

(उपप्राचार्य)
श्री हरिदेवदास अग्रवाल राउमावि
फागलवा ब्लॉक धोद (सीकर)

मनोज कुमार यादव

(व्याख्याता)
पीएम श्री महात्मा गांधी सरकारी सी.से.
विद्यालय, गोकुलपुरा (सीकर)

मुकेश रेवाड़

(व्याख्याता)
पीएम श्री शहीद शकरखान
रा.उ.मा.वि. मंगलूणा (सीकर)

सूर्यप्रकाश

(व्याख्याता)
रा.उ.मा.वि. हरसावा बड़ा
फतेहपुर (सीकर)

कार्यालय: संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राज.)

प्रश्न–पत्र की योजना– 2026

कक्षा – **XII**
विषय – गणित
अवधि –3 घण्टा 15 मिनट   पूर्णांक– 80

1. उद्देश्य हेतुअंकभार–

क्र.सं.	उद्देश्य	अंकभार	प्रतिशत
1.	ज्ञान	24	30
2.	अवबोध	24	30
3.	ज्ञानोपयोग	16	20
4.	कौशल	8	10
5.	विश्लेषण	8	10
	योग	80	100

2. प्रश्नों के प्रकारवारअंकभार–

क्र.सं.	प्रश्नों का प्रकार	प्रश्नों की संख्या	अंक प्रतिप्रश्न	कुलअंक	प्रतिशत (अंको का)	प्रतिशत (प्रश्नों का)	संभावित समय
1.	बहुविकल्पात्मक	18	1	18	22.5	33.96	36
2.	रिक्तस्थान	6	1	6	7.5	11.32	15
3.	अतिलघुत्तरात्मक	12	1	12	15.0	22.64	42
4.	लघुत्तरात्मक	10	2	20	25.0	18.87	40
5.	दीर्घउत्तरीय	4	3	12	15.0	7.55	32
6.	निबंधात्मक	3	4	12	15.0	5.66	30
	योग	53		80	100.00	100.00	195 मिनट

विकल्प योजना : खण्ड 'स' एवं 'द' मेंहैं ।

3. विषय वस्तु का अंकभार–

क्र.सं.	विषय वस्तु	अंकभार	प्रतिशत
1	सम्बन्ध एवंफलन	3	3.75
2	प्रतिलोम त्रिकोणमिति फलन	4	5.00
3	आव्यूह	5	6.25
4	सारणिक	5	6.25
5	सांतत्य एवं अवकलनीयता	8	10.00
6	अवकलज के अनुप्रयोग	6	7.50
7	समाकलन	12	15.00
8	समाकलनों के अनुप्रयोग	4	5.00
9	अवकल समीकरण	6	7.50
10	सदिश बीजगणित	7	8.75
11	त्रिविमीय ज्यामिति	9	11.25
12	रैखिक प्रोग्रामन	4	5.00
13	प्रायिकता	7	8.75
	सर्वयोग	**80**	**100**

प्रश्न–पत्र ब्ल्यूप्रिन्ट 2026

कक्षा –XII　　　　विषय :–गणित　　　　समय 3:15 घन्टे　　　　पूर्णांक–80

क्र.सं.	उद्देश्य इकाई / उपइकाई	ज्ञान						अवबोध						ज्ञानोपयोग						कौशल						विश्लेषण						योग
		बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरा	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरात्मक	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	बहुविकल्पात्मक	रिक्तस्थान	अतिलघुत्तरा	लघुत्तरात्मक	दीर्घउत्तरात्मक	निबन्धात्मक	
1	सम्बन्ध एवं फलन	1(1)									2(1)																					3(2)
2	प्रतिलोम त्रिकोणमिति फलन								1(1)					1(1)			2(1)															4(3)
3	आव्यूह	1(1)		1(1)				1(1)																					2(1)			5(4)
4	सारणिक	1(1)							1(1)							1(1)													2(1)			5(4)
5	सांतत्य एवं अवकलनीयता	1(1)			2(1)			1(1)			2(1)					1(2)																8(6)
6	अवकलज के अनुप्रयोग	1(1)		1(2)					1(1)								2(1)															6(5)
7	समाकलन	1(1)			2(1)				1(1)			3(1)*	4(1)*			1(1)																12(6)
8	समाकलनों के अनुप्रयोग			1(1)													2(1)			1(1)												4(3)
9	अवकल समीकरण	1(1)				3(1)*				1(1)					1(1)																	6(4)
10	सदिश बीजगणित	1(1)		1(1)					1(1)		2(1)			1(1)						1(1)												7(6)
11	त्रिविमीय ज्यामिति	1(1)		1(1)								3(1)*																			4(1)*	9(4)
12	रैखिक प्रोग्रामन																								4(1)*							4(1)
13	प्रायिकता	1(1)		1(1)														3(1)*		1(2)												7(5)
	योग	10(10)		7(7)	4(2)	3(1)		2(2)	5(5)	1(1)	6(3)	6(2)	4(1)	2(2)	1(1)	4(4)	6(3)	3(1)		4(4)					4(1)				4(2)		4(1)	80(53)
	सर्वयोग	**24(20)**						**24(14)**						**16(11)**						**8(5)**						**8(3)**						**80(53)**

विकल्पों की योजना :– खण्ड 'स' एवं 'द' में प्रत्येक में एक आंतरिक विकल्प है　नोटः– कोष्ठक के बाहर की संख्या 'अंकों' की तथा अंदर की संख्या 'प्रश्नों' के द्योतक है।

विशेष :–उक्त ब्ल्यूप्रिन्ट मॉडल प्रश्नपत्र का है जो प्रश्नों के प्रकारों को समझने की सुविधा मात्र के लिए है। मूल प्रश्नपत्र का ब्ल्यूप्रिन्ट भिन्न हो सकता है।

अध्याय — 1
सम्बन्ध एवं फलन

अंकभार (1 + 2 = 3)

1. मान लीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ में, $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उतर चुनिए।
   (1) R स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है।
   (2) R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।
   (3) R सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।
   (4) R एक तुल्यता संबंध है।
2. समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1, 1) (2, 2) (3, 3) (1, 2) (2, 3)\}$ द्वारा प्रदत संबंध है?
   (1) स्वतुल्य (2) सममित (3) संक्रामक (4) तुल्यता
3. R से R में परिभाषित निम्न में से कौनसा फलन एकैकी है–
   (1) $F(x) = |x|$ (2) $F(x) = \cos x$
   (3) $F(x) = e^x$ (4) $F(x) = x^2$
4. समुच्चय $A= \{1, 2, 3, 4\}$ से स्वयं तक सभी एकैकी फलन की संख्या होगी –
   (1) 3 (2) 4
   (3) 8 (4) 6
5. यदि $R = \{(x, y) : x, y \in z, x^2 + y^2 \le 4 \}$ एक संबंध है तब R का प्रान्त होगा –
   (1) $\{0, 1\}$ (2) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
   (3) $\{2, -2\}$ (4) $\{0, 1, 2\}$
6. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो अवयव $(1, 2)$ वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है–
   (1) 1 (2) 2
   (3) 3 (4) 4
7. मान लीजिए कि $f : R \to R$, $f(x) = x^4$ द्वारा परिभाष्ता है। सही उतर का चयन कीजिए।
   (1) f एकैकी आच्छादक है (2) f बहुएक आच्छादक है
   (3) f एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है
   (4) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है
8. यदि $f : R \to R$, $f(x) = 2x + 3$ और $g : R \to R$ $g(x) = x^2 + 1$ तो $gof(2)$ का मान होगा –
   (1) 25 (2) 5
   (3) 10 (4) 50
9. $A = \{1, 2\}$ तथा $B = \{3, 4\}$ तो A और B में सम्बन्धों की संख्या होगी –
   (1) 4 (2) 16
   (3) 24 (4) 2

-: Answer :-

1-2, 2-1, 3-3, 4-1, 5-4, 6-2, 7-4, 8-3, 9-2

10. समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $(1, 2)$ तथा $(2, 1)$ को अन्तर्विष्ट करने वाले तुल्यता संबंधों की संख्या .... है।
11. समुच्चय $\{1, 2, ...\, n\}$ से स्वंय तक समस्त आच्छादक फलनों की संख्या.............. है।
12. यदि $f : R \to R$, $f(x) = (3 - x^3)^{1/3}$ तो $fof(x)$ ज्ञात करें –

Ans. $f(x) = (3 - x^3)^{1/3}$

$$fof(x) = f[f(x)]$$
$$= f\left[(3 - x^3)^{1/3}\right]$$
$$= \left[3 - \left\{(3 - x^3)^{1/3}\right\}^3\right]^{1/3}$$
$$= \left[3 - 3 + x^3\right]^{1/3}$$
$$= \left[x^3\right]^{1/3}$$
$$= x$$

13. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R = \{(a,b) : a \le b^2\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित है और न ही संक्रमक है।

Ans. दिया है, $A = R =$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

तथा $R = \{(a,b) : a \le b^2\}$

स्वतुल्य संबंध के लिए, हम जानते है कि $\frac{1}{2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^2$ सत्य नहीं है।

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \notin R$ अतः R, स्वतुल्य संबंध नहीं है।

सममित संबंध के लिए, हम जानते हैं कि $-1 \le 3^2 \Rightarrow (-1,3) \in R$

लेकिन $3 \le (-1)^2$

$\Rightarrow (3,-1) \notin R$ अतः R सममित संबंध नहीं है।

संक्रमक संबंध के लिए, हम जानते है कि $2 < (-3)^2 \therefore (2,-3) \in R$

तथा $(-3) \le (1)^2$

$\therefore (-3,1) \in R$ लेकिन $2 \le 1^2 \therefore (2,1) \notin R$ अतः R एक संक्रमक संबंध नहीं है।

14. $f(x) = 4x + 3$ द्वारा प्रदत फलन $f : R \to R$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। f का प्रतिलो फलन ज्ञात कीजिए।

Ans. फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = 4x + 3, \forall x \in R$

द्वारा परिभाषित फलन है।

मान लीजिए $x, y \in R$ इस प्रकार है कि $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow 4x + 3 = 4y + 3$

$\Rightarrow x = y$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।

मान लीजिए प्रत्येक वास्तविक संख्या $y \in R$ के लिए R में, $x \in R$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$f(x) = y \Rightarrow 4x + 3 = y \Rightarrow x = \frac{y-3}{4}$

$\therefore$ प्रत्यक $y \in R$ के लिए $x = \frac{y-3}{4} \in R$ इस प्रकार है कि

$f(x) = f\left(\frac{y-3}{4}\right) = 4\left(\frac{y-3}{4}\right) + 3 = y$

$\therefore f$ आच्छादक फलन है। अतः f एकैकी आच्छादक फलन है।

अतः $\therefore f^{-1}$ विद्यमान है। मान लीजिए $g : R \to R$ में,

$g(x) = \frac{x-3}{4}$ द्वारा परिभाषित है।

15. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = [x]$ द्वारा प्रदत महतम पूर्णांक फलन $f : R \to R$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहां $[x], x$ से कम या उसके बराबर महतम पूर्णांक को निरूपित करता है।

Ans. फलन $f : R \to R$ में, $f(x) = [x], \forall x \in R$

द्वारा परिभाषित फलन है, जहां $[x], x$ से कम या उसके बराबर महतम पूर्णांक फलन है।

चूंकि $f(1{,}2) = [1{,}2] = 1$

$f(1{,}9) = [1{,}9] = 1$

$\therefore$ $f(1{,}2) = f(1{,}9) = 1$ लेकिन $1.2 \ne 1.2$

$\therefore$ f एकैकी फलन नहीं है।

पुनः $0.7 \in R$ के लिए R में कोई $x \in R$ इस प्रकार नहीं है कि $f(x) = 0.7$ अर्थात् $[x] = 0.7$

$\therefore f$ आच्छादक फलन नहीं है।

अतः महतम पूर्णांक फलन न तो एकैकी है न ही आच्छादक है।

16. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$, में दिए गए निम्नलिखित संबंधों R में से प्रत्येक एक तुल्यता संबंध है।

(i) $R = \{(a,b) : |a-b|, 4$ का गुणज है$\}$

Ans. दिया है, $A = \{x \in Z : 0 \le x \le 12\}$

$= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

(i) $R = \{(a,b) : |a-b|, 4$ का गुणज है$\}$

चूंकि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $|a-a| = 0$, जो कि 4 का गुणज है। अतः R स्वतुल्य संबंध हैं अब, मान लीजिए

$(a,b) \in R \Rightarrow |a-b|, 4$ का गुणज है।

$\Rightarrow |-(b-a), 4$ का गुणज है।

$\Rightarrow |b-a|, 4$ का गुणज है।

$\Rightarrow (b,a) \in R, \forall a,b \in R$

अतः R सममित संबंध है। अब, मान लीजिए $(a,b),(b,c) \in R$, तब $|a-c|$ तथा $|b-c|$ 4 के गुणज है। $|a-c|$, 4 का गुणज है। $\therefore (a,c) \in R$

$\therefore R$, संक्रमक संबंध है। अतः R, एक तुल्यता संबंध है।

17. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = |x|$ मापांक फलन $f : R \to R$ न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

Sol. (i) एकैकी $f(x) = |x|$

$\because |-1| = 1$ तथा $|1| = 1$

परन्तु $-1 \ne 1$

f एकैकी नहीं है।

(ii) आच्छादक $f(x) = |x| =$ धनात्मक मान

अर्थात् R के ऋणात्मक मानों का पूर्व प्रतिबिम्ब R में विद्यमान नहीं है।

$\Rightarrow$ f आच्छादक नहीं है।

अतः f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

18. मान लीजिए कि A = R - {3} तथा B = R - {1} है। $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ द्वारा परिभाषित फलज $f : A \to B$ पर विचार कीजिए। क्या f एकैकी तथा आच्छादक है?

Sol. एकैकी = माना f (x) = f (y)

$\Rightarrow \quad \frac{x-2}{x-3} = \frac{y-2}{y-3}$

$\Rightarrow \quad (y - 3)(x - 2) = (x - 3)(y - 2)$

$\Rightarrow \quad yx - 2y - 3x + 6 = xy - 2x - 3y + 6$

$\Rightarrow \quad -2y - 3x = -2x - 3y$

$\Rightarrow \quad x = y$

अतः f एकैकी है।

आच्छादक :- माना f (x) = y

$\Rightarrow \quad \frac{x-2}{x-3} = y$

$\Rightarrow \quad y(x - 3) = (x - 2)$

$\Rightarrow \quad xy - x = 3y - 2$

$\Rightarrow \quad x(y - 1) = 3y - 2$

$\Rightarrow \quad \frac{3y-2}{y-1} = x$

अपरिभाषित होगा यदि y = 1,

$\because$ B = R - {1} है।

अतः फलन आच्छादक है।

अध्याय – 2
प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

अंकभार (1 + 1 + 1 + 1 = 4)

1. $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान है –

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{3}$

(3) $-\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{2\pi}{6}$

2. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ का मान है–

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$

(3) $\frac{1}{4}$ (4) 1

3. $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ का मान है–

(1) π (2) $-\frac{\pi}{2}$

(3) 0 (4) $2\sqrt{3}$

4. $\sin\left(\tan^{-1}x\right), |x|<1$ बराबर होता है–

(1) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

5. $\sin^{-1}x = y$ तो

(1) $0 \le y \le \pi$ (2) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(3) $0 < y < \pi$ (4) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

6. $\sin^{-1}x$ का मुख्य मान है –

(1) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (2) $[0, \pi]$

(3) $[0, 2\pi]$ (4) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

-: Answer :-

1-1, 2-4, 3-2, 4-4, 5-2, 6-1

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

7. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right) = ...$

Ans. $\cos^{-1}x$ का मुख्य मान = $[0, \pi]$

$$\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

8. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = ...$

Ans. $\because \sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$, $\sin^{-1}x$ का मुख्य मान $= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\therefore \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sin^{-1}\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$$

9. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = ...$

Ans. $\because \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ का मुख्यमान $= [0, \pi]$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi - \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

10. यदि $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x\right) = 1$ तब $x = ...$

Ans. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x\right) = 1$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x = \sin^{-1}1$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\left[\because \sin\frac{\pi}{2}=1\right]$$

$\Rightarrow \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{1}{5}$

$\Rightarrow \cos^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1}{5}$ $\left[\because \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow x = \frac{1}{5}$

11. सिद्ध करो $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1}x,\ x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Sol. माना $x = \sin\theta \quad \Rightarrow \theta = \sin^{-1}x$

$\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \sin^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$

$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)$ $\left[\because 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta\right]$

$= \sin^{-1}(\sin 2\theta)$

$= 2\theta$

$= 2\sin^{-1}x$

12. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right) = ...$

Ans. $\sin^{-1}x$ का मुख्यमान $= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore \sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$

13. $\cot\left(\tan^{-1}a + \cot^{-1}a\right) = ...$

Ans. $\cot\left(\tan^{-1}a + \cot^{-1}a\right) = \cot\frac{\pi}{2}$

$\left[\because \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right]$

$= 0$

14. $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = ...$

Ans. $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= \tan^{-1}(1) + \left[\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \left[-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

$\left[\begin{array}{l}\because \sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x \\ \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x\end{array}\right]$

$= \frac{\pi}{4} + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi + 8\pi - 2\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$

15. $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{7}{24}$ का मान .... है।

Ans. $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{7}{24} = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{2}{11} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{2}{11} \times \frac{7}{24}}\right]$

$\left[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{48+77}{264}}{1 - \frac{14}{264}}\right]$

$= \tan^{-1}\left[\frac{\frac{125}{264}}{\frac{264-14}{264}}\right] = \tan^{-1}\frac{\frac{125}{264}}{\frac{250}{264}} = \tan^{-1}\left[\frac{125}{250}\right] = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

16. x का मान ज्ञात करे :–

$\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x, \quad (x > 0)$

Sol. $\Rightarrow 2\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left[\frac{2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\right] = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left[\frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x)^2 - (1-x)^2}\right] = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow \frac{1-x^2}{2x} = x$

$\Rightarrow 1 - x^2 = 2x^2$

$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\because x > 0 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

17. फलन $\tan^{-1}\left[\sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)}\right],\ 0 < x < \pi$ को सरलतम रूप में लिखिए।

<u>हल:–</u> $\tan^{-1}\left[\sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)}\right]$

$$= \tan^{-1}\left[\sqrt{\left(\frac{1-1+2\sin^2\frac{x}{2}}{1+2\cos^2\frac{x}{2}-1}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\tan\frac{x}{2}\right] = \frac{x}{2}$$ **उत्तर**

18. सिद्ध कीजिए –

$$\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right),\ x \in [0,1]$$

<u>हल:–</u> R.H.S $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

माना कि $x = \tan^2\theta$ या $\tan\theta = \sqrt{x}$ या $\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\cos 2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times 2\theta$$

$$= \theta$$

$$= \tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right) = \text{L.H.S.}$$

19. सिद्ध कीजिए :–

$$\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

<u>हल:–</u> L.H.S. $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$$= \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right) \qquad \left\{\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{9}{4}\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \qquad \left\{\cos^{-1}x = \sin^{-1}\left[\sqrt{(1-x^2)}\right]\right\}$$

$$= \frac{9}{4}\sin^{-1}\left\{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}}\right\}$$

$$= \frac{9}{4}\sin^{-1}\left\{\sqrt{\frac{9-1}{9}}\right\}$$

$$= \frac{9}{4}\sin^{-1}\left\{\frac{\sqrt{8}}{3}\right\} = \frac{9}{4}\sin^{-1}\left\{\frac{2\sqrt{2}}{3}\right\} = \text{R.H.S.}$$

20. सिद्ध कीजिए :–

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

<u>हल:–</u> L.H.S. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{5\times 7}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{7+5}{35}}{\frac{35-1}{35}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{8+3}{24}}{\frac{24-1}{24}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{6}{17}+\frac{11}{23}}{1-\frac{6\times 11}{17\times 23}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{138+187}{391-66}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{325}{325}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} = \text{R.H.S.}$$

21 हल कीजिए–

$$\cos^{-1}\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]+\tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

Sol. $$\cos^{-1}\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]+\tan^{-1}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}\left[-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right]+\tan^{-1}\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \pi-\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)-\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \pi-2\tan^{-1}x-2\tan^{-1}x=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \pi-4\tan^{-1}x=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 4\tan^{-1}x=\pi-\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 4\tan^{-1}x=\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x=\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow x=\tan\frac{\pi}{12}$$

21. $\sin^{-1}\frac{8}{17}+\sin^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{77}{36}$ दोनों $\sin^{-1}$ फलनों को जोड़ने के लिए हम निम्न संबंध का प्रयोग करते हैं।

$$\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$$

Sol. ज्ञात है, $\sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\tan^{-1}\frac{77}{36}$

बॉया पक्ष =

$$\sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\sin^{-1}\left[\frac{8}{17}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}+\frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}\right]$$

$$[\because \sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{15}{17}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{77}{85}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{77}{85}}{\sqrt{1-\left(\frac{77}{85}\right)^2}}\right]\quad\left(\because \sin^{-1}x=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{77}{85}\times\frac{85}{36}\right)$$

$=\tan^{-1}\frac{77}{36}$ = दायाँ पक्ष

अध्याय – 3
मैट्रिक्स

अंकभार (1 + 1 + 1 + 2 = 5)

1. यदि $A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $B=[-1,\ 2,\ 3]$ है तो [AB] मैट्रिक्स की कोटि होगी?

(1) 1 × 1 (2) 3 × 3
(3) 3 × 2 (4) 2 × 3

2. यदि वर्ग मैट्रिक्स A एक सममित मैट्रिक्स है तो मैट्रिक्स $A+A^1$ होगी –

(1) सममित मैट्रिक्स (2) विषम सममित मैट्रिक्स
(3) सममित तथा विषम दोनों (4) इनमें से कोई नहीं

3. यदि A एक वर्ग आव्यूह इस प्रकार है कि $A^2=A$ तो $(2+A)^3$-7A बराबर है –

(1) A (2) I - A
(3) I (4) 3A

4. यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्युह है तो AB - BA एक :–

(1) शुन्य आव्युह (2) सममित आव्युह
(3) विषम सममित आव्यूह (4) तत्समक आव्युह

5. यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ तथा $A+A'=I$, हो तो α का मान होगा?

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{3}$
(3) π (4) $\frac{3\pi}{2}$

6. आव्यूह A तथा B एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे केवल यदि –

(1) AB = BA (2) AB = BA = 0
(3) AB = 0, BA = I (4) AB = BA = I

7. यदि $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}$ इस प्रकार है कि $A^2=I$ तो

(1) $1+\alpha^2+\beta\gamma=0$ (2) $1-\alpha^2+\beta\gamma=0$
(3) $1-\alpha^2-\beta\gamma=0$ (4) $1+\alpha^2-\beta\gamma=0$

8. यदि A एक समंमित और विषमसममीत दोनों ही आव्यूह है तो :–

(1) A एक विकर्ण आव्यूह है। (2) A एक शून्य आव्यूह है।
(3) A एक वर्ग आव्यूह है। (4) इनमें से कोई नहीं

9. आव्यूहों में परिवर्त के गुणधर्म के आधार पर असत्य विकल्प का चयन कीजिए–

(1) (AB)' = B' A'
(2) (A+B)' = A'+B'
(3) (KA)' = KA' (जहाँ K कोई अचर है।)
(4) (AB)' = A' B'

10. किसी वर्ग आव्यूह A के लिए A + A' होगा –

(1) इकाई आव्यूह (2) सममित आव्यूह
(3) विषम सममित आव्यूह (4) शून्य आव्यूह

11. यदि आव्यूह $B=[b_{ij}]_{2\times4}$ हो, तो B में अवयवों की संख्या होगी–

(1) 2 (2) 4
(3) 6 (4) 8

12. यदि आव्यूह A और B के क्रम क्रमशः $m\times n$ तथा $n\times p$ है तो AB का क्रम है –

(1) p × m (2) n × m
(3) n × p (4) m × p

13. यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह है तो AB - BA एक है –

(1) विषम सममित आव्यूह (2) सममित आव्यूह
(3) शून्य आव्यूह (4) तत्समक आव्यूह

-: Answer :-

1-, 2-, 3-, 4-, 5-2, 6-4, 7-3, 8-2, 9-4,

10-2, 11-4, 12-4, 13-1

14. एक 2 × 2 आव्युह $A=[a_{ij}]$ की रचना कीजिए

यदि $a_{ij}=\frac{(i+j)^2}{2}$ से प्रदत्त है।

Ans. माना 2 × 2 का आव्यूह $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$

$$\because a_{ij}=\frac{(i+j)^2}{2}$$

$a_{11} = \frac{(1+1)^2}{2} = 2,\ a_{12} = \frac{(1+2)^2}{2} = \frac{9}{2}$

इसी प्रकार $a_{21} = \frac{9}{2},\ a_{22} = 8$

अतः $A = \begin{bmatrix} 2 & 9/2 \\ 9/2 & 8 \end{bmatrix}$

15. यदि $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ तथा

$B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ है तो AB ज्ञात कीजिए –

Ans. $AB = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12+63 & 36+81 & 0+72 \\ 4+21 & 12+27 & 0+24 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 75 & 117 & 72 \\ 25 & 39 & 24 \end{bmatrix}$

16. यदि $x\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ है तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए –

Ans. यहाँ $x\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2x \\ 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2x-y \\ 3x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

$= 2x - y = 10$.................. (1)

$3x + y = 5$.................... (2)

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर

$x = 3,\ \ y = -4$

17. सिद्ध कीजिए कि आव्युह $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ के लिए $(A + A^1)$ एक सममित आव्युह है।

Sol. हम जानते है कि $(A + A^1)$ आव्युह सममित होती है यदि $(A + A^1) = A + A^1$

यहाँ LHS $(A + A^1)^1$

$= \left[\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}^1\right]^1$

$= \left[\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\right]^1$

$= \left[\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\right]^1$

$= \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$

अतः $(A + A^1) = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$..................(1)

RHS $(A + A^1) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$

$(A + A^1) = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$ .... (2)

समीकरण (1) व (2) से स्पष्ट है कि $A + A^1$ एक सममित आव्यूह है।

18. यदि $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. यहाँ $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+2 \\ 9 \\ 2x+3 \end{bmatrix} = 0$

$[x^2 + 2x - 45 - 2x - 3] = 0$

$[x^2 - 48] = [0]$

$x^2 - 48 = 0$

$x^2 = 48$

$x = \pm 4\sqrt{3}$

19. आव्युह $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्युह तथा एक विषम सममित आव्युह के योगफल के रूप में ज्ञात कीजिए।

Ans. यहाँ $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ $A^1=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & -1\end{bmatrix}$

माना $P=\frac{1}{2}(A+A^1)$

$$P=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & 6\\ 6 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow P^1=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

अतः $P=\frac{1}{2}(A+A^1)$ एक सममित आव्युह है।

माना $Q=\frac{1}{2}(A-A^1)$

$$Q=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 4\\ -4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$Q^1=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

$Q^1 = -Q$

अतः $Q=\frac{1}{2}(A-A^1)$ एक विषम सममित आव्यूह है।

अब $P+Q=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

$$P+Q=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & -1\end{bmatrix}=A$$

अतः $A=P+Q$

अतः मैट्रिक्स A को सममित तथा विषम सममित के योगफल के शून्य में व्यक्त किया जा सकता है।

20. वास्तविक अवयवों वाले किसी वर्ग आव्यूह A के लिए सिद्ध कीजिए कि $A+A^1$ सममित आव्युह है तथा $A-A^1$ विषम सममित आव्युह है।

Ans. सिद्ध करना है :–

(i) $(A+A^1)$ एक सममित आव्युह है अर्थात् $(A+A^1)^1 = A+A^1$

(ii) $(A+A^1)$ एक विषम सममित आव्युह है अर्थात् $(A+A^1)^1 = -(A+A^1)$

यहाँ $(A+A^1)^1 = A^1+(A^1)^1$

$= A^1+A$ $\{\because (A^1)^1 = A\}$

अतः $(A+A^1)^1 = A^1+A$

अतः $A+A^1$ सममित है।

अब $(A-A^1)^1 = A^1-(A^1)^1$

$= A^1-A$

$(A-A^1)^1 = -(A-A^1)$

अतः $(A-A^1)$ एक विषम सममित आव्यूह है।

21. यदि $F(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए

$F(x).F(y)=F(x+y)$

Ans. $F(y)$ के लिए x के स्थान पर y रखे तथा इसी प्रकार $F(x+y)$ के लिए x के स्थान पर $x+y$ रखे।

बांया भाग

$$F(x).F(y)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos y & -\sin y & 0\\ \sin y & \cos y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

या $F(x)F(y)=\begin{bmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & -\cos x\sin y-\sin x\cos y & 0\\ \sin x\cos y+\cos x\sin y & -\sin x\sin y+\cos x\cos y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\therefore \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B\\ \therefore \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B\end{bmatrix}$$

या $F(x).F(y)=\begin{bmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y) & 0\\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

या $F(x).F(y)=F(x+y)$

22. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ तथा $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ एवं $A^2=k.A-2I$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $A^2=A.A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}$

या $A^2=\begin{bmatrix}9-8 & -6+4\\ 12-8 & -8+4\end{bmatrix}$

या $A^2=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & -4\end{bmatrix}$ $\therefore A^2=k.A-2I$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ 4k & -2k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k-2 & -2k \\ 4k & -2k-2 \end{bmatrix}$$

समान आव्यूह के गुणधर्म द्वारा समान आव्यूह के संगत अवयवों को समान रखने पर

$3k - 2 = 1 \Rightarrow k = 1$

$-2k = -2 \Rightarrow k = 1$ अतः $k = 1$

$4k = 4 \Rightarrow k = 1$

$-4 = -2k - 2 \Rightarrow k = 1$

23. यदि $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ है तो $(A+2B)'$ ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया गया है– $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

अतः $B' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore (A+2B)' = A' + (2B)'$

$\Rightarrow (A+2B)' = A' + 2B'$

$$\Rightarrow (A+2B)' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+2B)' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+2B)' = \begin{bmatrix} -2-2 & 3+2 \\ 1+0 & 2+4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A+2B)' = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

24. $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$ को हल कीजिए–

Ans. $\begin{bmatrix} \cos^2 x + \sin^2 x & \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin^2 x + \cos^2 x & \cos^2 x + \sin^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

25. एक ऐसे 2 × 2 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जिसके अवयव $a_{ij} = |-5j + 2j|$ द्वारा दिए जाते है –

Ans. $a_{ij} = |-5i + 2j|$

$a_{11} = |-5\times1 + 2\times1| = |-5 + 2| = 3$

$a_{12} = |-5\times1 + 2\times2| = |-5 + 4| = 1$

$a_{21} = |-5\times2 + 2\times1| = |-10 + 2| = 8$

$a_{22} = |-5\times2 + 2\times2| = |-10 + 4| = 6$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

26. सरल कीजिए –

$$\cos\theta\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

Ans. $\cos\theta\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अध्याय – 4
सारणिक

अंकभार (1 + 1 + 1 + 2 = 5)

1. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$ का मान होगा?

(1) 0 (2) 1

(3) –1 (4) 3

2. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ हो तो x बराबर है–

(1) 6 (2) –6

(3) ± 6 (4) 0

3. तीन संरेख बिन्दुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा –

(1) 0 (2) 1

(3) –1 (4) ± 1

4. यदि n कोटि का एक वर्ग आव्यूह A हो तो |adj(A)| होगा–

(1) $|A|$ (2) $|A|^n$

(3) $|A|^{n+1}$ (4) $|A|^{n-1}$

5. यदि A कोटि दो का व्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो del (A^{-1}) होगा–

(1) del(A) (2) $\frac{1}{del(A)}$

(3) 1 (4) 0

6. यदि आव्यूह A अव्युत्क्रमीण है तो |A| का मान होगा –

(1) $|A| = 0$ (2) $|A| \neq 0$

(3) $|A| = 1$ (4) None of these

Ans. (1)

-: Answer:-

1-2, 2-3, 3-1, 4-4, 5-2, 6-1

रिक्त स्थान

7. यदि AB = BA = I तो B^{-1} ....

Ans. $B^{-1} = A$

8. यदि $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & 4x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ तो x = ...

Ans. 8x - 3x = 6 - 6 = 0

5x = 0

x = 0

9. यदि आव्यूह A प्रतिलोमीय नहीं है तब |A| = ...

Ans. $|A| = 0$

10. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज आव्यूह .... होगा।

Ans. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

11. यदि बिन्दु $(\lambda,3), (-2,4), (3,1)$ संरेख है तब $\lambda =$ ....

Ans. $\begin{vmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda(4-1) - 3(-2-3) + 1(-2-12) = 0$

$\Rightarrow 3\lambda + 15 - 14 = 0$

$\Rightarrow 3\lambda + 1 = 0$

$\Rightarrow 3\lambda = -1$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{3}}$

12. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ तो $A^{-1} =$ ....

Ans. $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2$

तब $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj }(A) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

13. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए–

Ans. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$

$|A| = -\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = -(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = -1$

$\therefore A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha \\ 0 & -\cos\alpha \end{vmatrix} = 0$

$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = 0$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -\cos\alpha$

$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha \end{vmatrix} = -\sin\alpha$

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0$

$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha \end{vmatrix} = -\sin\alpha$

$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha$

$\therefore \text{adj}_A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}_A = -\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

14. यदि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया है कि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

या $3 - x^2 = 3 - 8$

या $x^2 = 8$

अतः $x = \pm 2\sqrt{2}$

15. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तो दिखाइए $|2A| = 4|A|$

Ans. दिया गया है $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$|A| = 2 - 8 = -6$

$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

$|2A| = 2\times4 - 8\times4 = 8 - 32 = -24$

अतः $|2A| = -24 = 4(-6) = 4|A|$

अतः $|2A| = 4|A|$

16. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (3, 8), (-4, 2) एवं (5, 1) है।

Ans. त्रिभुज का क्षेत्रफल

$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[3(2-1) - 8(-4-5) + 1(-4-10)]$

$\Delta = \frac{1}{2}(3 + 72 - 14)$

$\Delta = \frac{61}{2}$ वर्ग इकाई

17. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए।

Ans. हम जानते है कि $A_{11} = 4, A_{12} = -1$

$A_{21} = -3, A_{22} = 2$

अतः $adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

18. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ के सभी अवयवों के उपसारणिक व सहखंड ज्ञात कीजिए।

Ans. अवयव a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} है।

यहां $a_{11} = 1$, इसलिए $M_{11} = a_{11}$ का उपसारिणक $= 3$

$M_{12} =$ अवयव a_{12} का उपसारणिक $= 4$

$M_{21} =$ अवयव a_{21} का उपसारणिक $= -2$

$M_{22} =$ अवयव a_{22} का उपसारणिक $= 1$

अब a_{ij} का सहखंड A_{ij} है। इसलिए

$A_{11} = (-1)^{1+1|} M_{11} = (-1)^2 (3) = 3$

$A_{12} = (-1)^{1+2|} M_{12} = (-1)^3 (-4) = 4$

$A_{21} = (-1)^{2+1|} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2|} M_{22} = (-1)^4 (1) = 1$

19. सारणिकों का प्रयोग करके A(1,3) और B(0, 0) को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए और k का मान ज्ञात कीजिए। यदि एक बिन्दु D(k, 0) इस प्रकार है कि ΔABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई है।

Ans. मान लीजिए, AB पर कोई बिन्दु P(x, y) है तब

ΔABP का क्षेत्रफल $= 0$

इसलिए $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$

इससे प्राप्त है $\frac{1}{2}(y - 3x) = 0$

या $y = 3x$

जो अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

किन्तु ΔABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई दिया है अतः

$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3$

हमें प्राप्त है $\frac{-3k}{2} = \pm 3$

अतः $k = \pm 2$

20. प्रदर्शित कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ समीकरण $A^2 - 4A + I = 0$, जहां $I, 2\times 2$ कोटि का एक तत्समक आव्यूह है और $0, 2\times 2$ कोटि का एक शून्य आव्यूह हैं इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

Ans. हम जानते है कि

$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

अतः

$A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

अब $A^2 - 4A + I = 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow A^2 - 4A + I = 0$ को A^{-1} से गुणा करने पर

$\Rightarrow A^{-1}.(A^2 - 4A + I) = A^{-1}.0$

$\Rightarrow (A^{-1}.A)A - 4A^{-1}A + A^{-1} = 0$

$\Rightarrow A - 4I + A^{-1} = 0$

$\Rightarrow A^{-1} = 4I - A$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

अतः $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

21. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

Ans. हम जानते है कि $AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{bmatrix}$

क्योंकि $|AB| = \begin{vmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{vmatrix} = 4087 - 4089 = -2 \neq 0$

$(AB)^{-1}$ का अस्तित्व है और इसे निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त किया जाता है।

$(AB)^{-1} = \frac{1}{AB}.adj(AB) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix}$

और $|A|=\begin{vmatrix}3 & 7\\2 & 5\end{vmatrix}=15-14=1\neq 0$

और $|B|=\begin{vmatrix}6 & 8\\7 & 9\end{vmatrix}=54-56=-2\neq 0$

इसलिए A^{-1} एवं B^{-1} दोनों का अस्तित्व है और निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$A^{-1}=\frac{1}{(A)}adj(A)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}5 & -7\\-2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -7\\-2 & 3\end{bmatrix}$$

एवं $B^{-1}=\frac{1}{|B|}adj(B)=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}9 & -8\\-7 & 6\end{bmatrix}$

अतः $B^{-1}.A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}9 & -8\\-7 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -7\\-2 & 3\end{bmatrix}$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}45+16 & -63-24\\-35-12 & 49+18\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}61 & -87\\-47 & 67\end{bmatrix}$$

अतः $(AB)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$

22. सारणिकों का प्रयोग करके (1, 2) और (13, 6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हलः— माना बिन्दु $A(1,2)$ एवं $B(3,6)$ को मिलाने वाली रेखा पर बिन्दु $P(x,y)$ है।

अतः बिन्दु A, P एंव B एक रेखा पर है या संरेख है अतः इन तीनों बिन्दुओं से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल का मान शून्य होगा।

अतः— $\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x & y & 1\\1 & 2 & 1\\3 & 6 & 1\end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}x & y & 1\\1 & 2 & 1\\3 & 6 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow x(2-6)-y(1-3)+1(6-6)=0$$

$$\Rightarrow -4x+2y+0=0$$

$\Rightarrow \boxed{-2x+y=0}$ या $\boxed{y=2x}$

23. निम्न समीकरण निकाय को आव्यूह विधि से हल किजिए—

$$5x+2y=3$$
$$3x+2y=5$$

हलः— दिए गए समीकरण विकल्प को निम्न रूप में लिख सकते है।

$Ax=B$ जहाँ $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ एवं $B=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$

यहाँ $|A|=\begin{vmatrix}5 & 2\\3 & 2\end{vmatrix}=10-6=4\neq 0$

A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

A^{-1} विद्यमान है।

अतः दिया गया समीकरण निकाय संगत है तथा इसका अद्वितीय हल निम्न है। $X=A^{-1}B$

A के सहखण्ड निम्न है

$A_{11}=2,\ A_{12}=-3,\ A_{21}=-2,\ A_{22}=5$

$$ad_j(A)=\begin{bmatrix}2 & -3\\-2 & 5\end{bmatrix}^1=\begin{bmatrix}2 & -2\\-3 & 5\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{(A)}ad_j(A)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -2\\-3 & 5\end{bmatrix}$$

अबः— $X=A^{-1}B=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -2\\-3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}6-10\\-9+25\end{bmatrix}$

$$X=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4\\16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$$

अतः— $\boxed{x=-1,\ y=4}$

24. आव्युह $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$ के लिए a और b ऐसी संख्या ज्ञात कीजिए ताकि $A^2+aA+bI=0$ हो —

Ans. यहाँ $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$

$$A^2=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}11 & 8\\4 & 3\end{bmatrix}$$

$$\because A^2+aA+bI=0$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3a & 2a \\ a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11+3a+b & 8+2a \\ 4+a & 3+a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= 11 + 3a + b = 0$

$= 3a + b = -1$

$= 8 + 2a = 0$

$= 2a = -8$

$\boxed{a = -4}$

$= 3x - 4 + b = -11$

$= -12 + b = -11$

$\boxed{b = 1}$

25. समीकरण निकाय

$3x - 2y + 3z = 8$

$2x + y - z = 1$

$4x - 3y + 2z = 4$

को आव्युह विधि से हल कीजिए।

Sol. समीकरण निकाय को $AX = B$ पर बदलने पर

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

यहाँ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$AX = B$

$X = A^{-1}B$

अब $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}(A)}{|A|}$

$|A| = -17$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

अब $X = -\dfrac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{x = 1,\ y = 2,\ z = 3}$

अध्याय – 5
सांतत्य और अवकलनीयता

अंकभार (1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8)

1. फलन $f(x)=[x]$ असंतत है–
   (1) प्रत्येक वास्तविक संख्या पर
   (2) प्रत्येक परिमेय संख्या पर
   (3) प्रत्येक पूर्णांक पर
   (4) प्रत्येक अपरिमेय संख्या पर
2. निम्न में से कौनसा फलन अवकलनीय है (x = 0 पर)
   (1) $F(x) = [x]$ (2) $F(x) = |x|$
   (3) $F(x) = x^2$ (4) $F(x) = \frac{1}{x}$
3. $y=\log_a x$ तब $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा–
   (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ (2) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{ax}$
   (3) $\frac{dy}{dx}=\frac{\log_a e}{x}$ (4) $\frac{dy}{dx}=\frac{\log_e x}{x}$
4. फलन $\cos^{-1}(e^{-x})$ का अवकलन होगा–
   (1) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{x^2}}}$ (2) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{x^2}}}$
   (3) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ (4) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
5. $x^3\log x$ का x के सापेक्ष द्वितीय कोटि का अवकलज है–
   (1) $x(5+6\log x)$ (2) $x^2(5+6\log x)$
   (3) $x(6+5\log x)$ (4) $x^2(6+5\log x)$
6. फलन $3y=\sin x-2x$ का x के सापेक्ष अवकलन है–
   (1) $\frac{\cos x+2}{3}$ (2) $\frac{2-\cos x}{3}$
   (3) $\frac{\cos x-2}{3}$ (4) $\frac{\cos x-2}{-3}$
7. $y=\sin(\log x)$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ होगा –
   (1) $-\frac{\cos(\log x)}{x}$ (2) $\frac{\cos(\log x)}{x}$
   (3) $\cos(\log x)$ (4) $-\cos(\log x)$
8. फलन cos (sin x) का अवकलज है –
   (1) sin (sin x) (2) sin (cos x)
   (3) -sin (sin x) (4) - cos x sin (sin x)
9. tan (2x + 3) का x के सापेक्ष अवकलन है –
   (1) $\sec^2(2x+3)$ (2) 2log sec (2x + 3)
   (3) $2\sec^2(2x+3)$ (4) $\frac{1}{2}\log\sec(2x+3)$
10. यदि $y=5^{x^2}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान है –
   (1) $5^{x^2}\log_e 5$ (2) $2x\,5^{x^2}\log_e 5$
   (3) $5^{x^2-1}\cdot 2x$ (4) $5^{x^2}\cdot\log_e a$

-: Answer :-

1-3, 2-3, 3-3, 4-3, 5-1, 6-3, 7-2, 8-4, 9-3, 10-2

11. $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right]=$ .... है।

Ans. $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}\times e^{\sqrt{x}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}$

12. $\frac{d}{da}(a^x)=$ .... है।

Ans. $\frac{d}{da}(a^x)=xa^{x-1}$

13. यदि $y=\tan^{-1}x$ है तो $\frac{d^2y}{dx^2}=$ .... है।

Ans. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2},\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{(1+x^2)^2}\times 2x=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

14. फलन $f(x)=|(x-3|,x\in R,x$ के मान .... पर अवकलनीय नहीं है।

Ans. $x=3$ पर $f(x)=|(x-3)|$ अवकलनीय फलन नहीं होता है।

15. $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$ तब $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो।

हलः– $x=a\cos\theta$ समीकरण (1)
$y=a\sin\theta$ समीकरण (2)

समीकरण (1) व (2) का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर –

$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta$ तथा $\frac{dx}{d\theta} = -a\cos\theta$

अतः– $\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\cot\theta}$

16. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & if\ x \neq 0 \\ 0, & if\ x = 0 \end{cases}$

Ans. यहां, $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & if\ x \neq 0 \\ 0, & if\ x = 0 \end{cases}$

अब, $LHL = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$

$x = 0 - h$ रखने पर, $x \to 0^- \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{|0-h|}{0-h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{-h} = -1$

तथा $RHL = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$

$x = 0 + h$ रखने पर

$x \to 0^+ \Rightarrow h \to 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{|0+h|}{0+h} = \lim_{x\to 0} \frac{h}{h} = 1$

$\therefore \quad LHL \neq RHL$

अतः $f(x), x = 0$ पर असतत फलन है।

17. f के सतत्ता की जांच कीजिए, जहां f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है

$f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, & if\ x \neq 0 \\ -1, & if\ x = 0 \end{cases}$

Ans. यहां, $f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, & if\ x \neq 0 \\ -1, & if\ x = 0 \end{cases}$

अब,

$LHL = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (\sin x - \cos x)$

$x = 0 - h$ रखने पर, $x \to 0^- \Rightarrow h \to 0$

$\lim_{h\to 0}[\sin(0-h) - \cos(0-h)] = \lim_{h\to 0}(-\sin h - \cos h) = 0 - 1 = -1$

तथा

$RHL = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\sin x - \cos x)$

$x = 0 + h$ रखने पर, $x \to 0^+ \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}[\sin(0+h) - \cos(0+h)] = \lim_{h\to 0}(\sin h - \cos h) = 0 - 1 = -1$

$\therefore \quad LHL = RHL = f(0)$

अतः $f(x), x = 0$ पर सतत फलन है।

हम जानते हैं कि $x < 0$ के लिए $f(x) = \sin x - \cos x$ सतत फलन है तथा $x > 0$ के लिए $f(x) = \sin x - \cos x$ सतत् फलन है। अतः $f(x), x$ के प्रत्येक मान के लिए सतत है।

निम्नलिखित प्रश्नों में k के मानों को ज्ञात कीजिए, ताकि प्रदत फलन निर्दिष्ट बिन्दु पर सतत हो। (प्र.सं. 12–13)

18. $y = x^3 + \tan x$ हो तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात करो।

Ans. $y = x^3 + \tan x$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \sec^2 x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 2\sec^2 x \tan x$

19. $f(x) = \begin{cases} kx + 1, & \text{यदि } x \leq 5 \\ 3x - 5, & \text{यदि } x > 5 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 5$ पर

Ans. यहां, $f(x) = \begin{cases} kx + 1, & \text{यदि } x \leq 5 \\ 3x - 5, & \text{यदि } x > 5 \end{cases}$

अब, $LHL = \lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} (kx + 1)$

$x = 5 - h$ रखने पर, $x \to 5^- \Rightarrow h \to 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}[k(5-h) + 1] = \lim_{h\to 0}[5k - kh + 1] = 5k + 1$

तथा

$RHL = \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} (3x - 5)$

$x = 5 + h$ रखने पर, $x \to 5^+ \Rightarrow h - 0$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}[3(5+h) - 5] = \lim_{h\to 0}(10 + 3h) = 10$

पुनः, $f(5) = 5k + 1$

$[\because f(x) = kx + 1]$

$\because f(x) x = 5$ पर सतत् फलन है।

$\therefore \quad LHL = RHL = f(5)$

$LHL = RHL = f(5) \Rightarrow 5k + 1 = 10 \Rightarrow k = \frac{9}{5}$

20. दर्शाइए कि $f(x)=|\cos x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक सतत् फलन है।

Ans. मान लीजिए $g(x)=\cos x$ तथा $h(x)=|x|$

हम जानते है कि प्रत्येक $x \in R$ के लिए $g(x)=\cos x$ सतत् फलन है।

पुनः प्रत्येक $x \in R$ के लिए मापांक फलन $h(x)=|x|$ सतत् फलन होता हैं अतः संयोजक फलन,

प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $(hog)(x)=h(g(x))=h(\cos x)=|\cos x|$ सतत फलन होगा।

अतः $f(x)=|\cos x|$, प्रत्येक $x \in R$ के लिए सतत् फलन है।

21. $y=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0<x<1$

(i) $\frac{dy}{dx}=?$

Ans. $\tan^{-1}x=\theta$ अर्थात् $x=\tan\theta$ रखने पर,

$$\therefore\ y=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$\left(\because \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos 2\theta\right)$$

$$\Rightarrow\ y=\cos^{-1}(\cos 2\theta)=2\theta=2\tan^{-1}x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=2\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{2}{1+x^2}$$

$$\left(\because \frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}\right)$$

(ii) $y=\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0<x<1$

Ans. $x=\tan\theta \Rightarrow \tan^{-1}x=\theta$ रखने पर,

$$\therefore\ y=\sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)=\sin^{-1}(\cos 2\theta)$$

$$\Rightarrow y=\sin^{-1}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right]$$

$$\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-2\theta \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right)-2\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=0-\frac{2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-2}{1+x^2}$$

$$\left[\because \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}\right]$$

22. $y=\sin\left(\tan^{-1}e^{-x}\right)$

$\frac{dy}{dx}=?$

Ans. मान लीजिए $y=\sin\left(\tan^{-1}e^{-x}\right)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\sin\left(\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)\right)\right]$$

$$=\cos\left(\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)\right)\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)\right)$$

(श्रृंखला नियम से)

$$=\cos\left(\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)\right)\frac{1}{1+\left(e^{-x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)$$

$$=\cos\left(\tan^{-1}\left(e^{-x}\right)\right)\frac{1}{1+e^{-2x}}=-\frac{e^{-x}\cos\left(\tan^{-1}e^{-x}\right)}{1+e^{-2x}}$$

23. $y=\log\left(\cos e^{x}\right)$

$\frac{dy}{dx}=?$

Ans. मान लीजिए $y=\log\left(\cos e^{x}\right)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\log\left(\cos\left(e^{x}\right)\right)\right]=\frac{1}{\cos\left(e^{x}\right)}\frac{d}{dx}\left(\cos\left(e^{x}\right)\right)$$

(श्रृंखला नियम से)

$$=\frac{1}{\cos\left(e^{x}\right)}\left\{-\sin\left(e^{x}\right)\right\}\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)$$

$$=-\tan\left(e^{x}\right).e^{x}=-e^{x}\tan\left(e^{x}\right)$$

24. $y=\cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)-1<x<1$

$\frac{dy}{dx}=?$

Ans. $x=\tan\theta\Rightarrow\tan^{-1}x$ रखने पर,

$y=\cos^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$\Rightarrow y=\cos^{-1}(\sin 2\theta)$

$\left(\because \sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$\Rightarrow y=\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right]$

$\left[\because \sin 2\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right]$

$\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-2\theta\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-2\tan^{-1}x$

$(\because \theta=\tan^{-1}x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx}=0-\frac{2}{1+x^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-2}{1+x^2}$

$\left[\because \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}\right]$

25. $y^x=x^y$ $\frac{dy}{dx}=?$

Ans. दिया है, $y^x=x^y$

दोनों तरफ का लघुगणक लेने पर,

$\log y^x=\log y^x\Rightarrow x\log y=y\log x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{d}{dx}(x\log y)=\frac{d}{dx}(y\log x)$

$\Rightarrow x\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}+(\log y)=y\frac{1}{x}+(\log x)\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}-(\log x)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\log y$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{y}-\log x\right)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\log y$

$\Rightarrow \left(\frac{x-y\log x}{y}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{y-x\log y}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\frac{y-x\log y}{x-y\log x}\right)$

26. $x=\alpha\cos\theta, y=b\cos\theta$ $\frac{dy}{dx}=?$

Ans. दिया है, $x=a\cos\theta$ तथा $y=b\cos\theta$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{d\theta}=a(-\sin\theta)$ तथा $\frac{dy}{d\theta}=b(-\sin\theta)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{dy}{d\theta}\times\frac{d\theta}{}=\frac{-b\sin\theta}{-a\sin\theta}=\frac{b}{a}$

$\left(\because \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)$

27. $x=\sin t, y=\cos 2t$

$\frac{dy}{dx}=?$

Ans. $x=\sin t$ तथा $y=\cos 2t$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\therefore \frac{dx}{dt}=\cos t$ तथा $\frac{dy}{dt}=-(\sin 2t)2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}$

$\left(\because \frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)$

$=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}=\frac{-2(2\sin t\cos t)}{\cos t}=-4\sin t$

$(\because \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta)$

28. $y=\log(\log x)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=?$

Ans. मान लीजिए $y=\log(\log x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\log x}\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{\log x}.\frac{1}{x}=\frac{1}{x\log x}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x\log x}\right)=\frac{d}{dx}(x\log x)^{-1}$$

$$=-1(x\log x)^{-2}\frac{d}{dx}(x\log x)$$

$$=-\frac{1}{(x\log x)^2}\left[x\frac{d}{dx}\log x+\log x\frac{d}{dx}(x)\right]$$

$$=-\frac{1}{(x\log x)^2}\left(x.\frac{1}{x}+\log x.1\right)=\frac{-(1+\log x)}{(x\log x)^2}$$

29. यदि $y=5\cos x-3\sin x$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

Ans. दिया है, $y=5\cos x-3\sin x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=-5\sin x-3\cos x$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(-5\sin x-3\cos x)$$

$$=-5\cos x+3\sin x$$

$$=-(5\cos x-3\sin x)$$

$$=-y$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

30. $y=(\log x)^{\log x}$ के दोनों तरफ का लघुगणक लेकर अवकलन कीजिए।

Ans. मान लीजिए $y=(\log x)^{\log x}$

दोनो तरफ का लघुगणक लेने पर,

$$\log y=\log\left[(\log x)^{\log x}\right]$$

$$\Rightarrow\log y=\log x\log(\log x)$$

$(\because \log m^n=n\log m)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\left\{(\log x)\frac{d}{dx}\log(\log x)\right\}+\log\log(x)\frac{d}{dx}\log(x)$$

$$=(\log x)\frac{1}{\log x}\frac{1}{x}+\log(\log x)\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\{1+\log(\log x)\}$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\{1+\log(\log x)\}$$

$$=\frac{(\log x)^{\log x}}{x}(1+\log(\log x))$$

$$=(\log x)^{\log x}\left[\frac{1}{x}+\frac{\log(\log x)}{x}\right]$$

31. a और b के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$f(x)=\begin{cases}ax+1, & \text{यदि } x\le 3\\ bx+3, & \text{यदि } x>0\end{cases}$$ द्वारा परिभाषित फलन $x=3$ पर संतत है।

Ans. दिया हैः फलन $x=3$ पर संतत हैं। इसलिए बाएं पक्ष की सीमा = दाएं पक्ष की सीमा $=f(3)$

$$\Rightarrow\lim_{x\to3^-}f(x)=\lim_{x\to3^+}f(x)=f(3)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to3^-}ax+1=\lim_{x\to3^+}bx+3=3a+1$$

$$\Rightarrow 3a+1=3b+3=3a+1$$

$$\Rightarrow 3a=3b+2\Rightarrow a=b+\frac{2}{3}$$

32. यदि $x=a(\theta-\sin\theta)$ $y=a(1+\cos\theta)$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो।

हलः– $x=a(\theta-\sin\theta)$ $y=a(1+\cos\theta)$ दोनों समीकरणों का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर–

$\frac{dx}{d\theta}=a[1-\cos\theta]$ ——— समीकरण (1)

$\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$ ———— समीकरण (2)

अब $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-a\sin\theta}{a[1-\cos\theta]}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\times 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{a\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\cot\frac{\theta}{2}}$ **उत्तर**

33. यदि $x=a\left(\cos t+\log\tan\frac{t}{2}\right)$, $y=a\sin t$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो।

Ans. दिया है, $x=a\left(\cot+\log\text{tna}\frac{t}{2}\right)$ तथा $y=a\sin t$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt}=a\left\{-\sin t+\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\cdot\sec^2\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}\right\}$$

$\left[\because \frac{d}{dx}(\log|x|)=\frac{1}{x}\right]$

$$=a\left\{-\sin t+\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right\}$$

$$=a\left\{-\sin t+\frac{1}{\sin t}\right\}$$

$$=a\left\{\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\right\}$$

$\left(\because \sin t=2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt}=\frac{a\cos^2 t}{\sin t}$

$(\because 1-\sin^2 t=\cos^2 t)$ .... (i)

पुनः $\quad y=a\sin t \Rightarrow \frac{dy}{dt}=a\cos t$ .... (ii)

समी. (i) तथा (ii) से

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{a\cos t}{\frac{a\cos^2 t}{\sin t}}=\tan t$

34. यदि $x=\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$, $y=\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ मान होगा।

Sol. $x=\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$ .... (i)

$y=\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$ .... (ii)

समी. (i) तथा (ii) की गुणा करने पर,

$$xy=\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}\times\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$$

$$xy=\sqrt{a^{\sin^{-1}t}\cdot a^{\cos^{-1}t}}$$

$$xy=\sqrt{a^{\sin^{-1}t+\cos^{-1}t}}$$

$\left(\because \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}\right)$

$$xy=\sqrt{a^{\frac{\pi}{2}}}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx}+y=0$

$$x\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x}$$

35. यदि $\sin^{-1}(x\sqrt{x}),\ 0\le x\le 1$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान होगा?

Sol. $y=\sin^{-1}\left(x\sqrt{x}\right)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\sqrt{x}\right),\ 0\le x\le 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dx}(x^{3/2})}{\sqrt{1-(x\sqrt{x})^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{3}{2}x^{1/2}}{\sqrt{1-x^3}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}$$

36. यदि $y=\sin^{-1}x$ तब $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात करों।

Ans. $y=\sin^{-1}x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-3/2}(0-2x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

37. यदि $f(x)=x\sin x$ तब $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ज्ञात करों –

Ans. $f'(x)=x\cos x+\sin x$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\times 0+1=1$$

38. $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि $y=\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right),\ 0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ans. $y=\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$

$x=\cos\theta$ रखने पर

$$y=\sec^{-1}\left(\frac{1}{2\cos^2\theta-1}\right)$$

$$y=\sec^{-1}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right)$$

$$y=\sec^{-1}(\sec 2\theta)=2\theta$$

$$y=2\cos^{-1}x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}}$$

39. यदि $y=a^x+x^a$ तब $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करों।

Ans. $y=a^x+x^a$

$$\frac{dy}{dx}=a^x\log_e a+ax^{a-1}$$

40. $y=\frac{e^x}{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x\frac{d}{dx}e^x-e^x\frac{d}{dx}\sin x}{(\sin x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^x(\operatorname{cosec} x-\operatorname{cosec} x\cot x)$$

अध्याय – 6
अवकलज के अनुप्रयोग

अंकभार (1 + 1 + 2 + 2 = 6)

1. एक 10 m त्रिज्या के बेलनाकार टंकी में 314 m^3/h की दर से गेंहू भरा जाता हैं भरे गए गेहूं की गहराई की वृद्धि दर है–
(1) 1 m/h (2) 0.1 m/h
(3) 1.1 m/s (4) 0.5 m/h

2. निम्न में से $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है–
(1) -sin x (2) cos 2 x
(3) cos 3 x (4) tan x

3. एक वृत की त्रिज्या $r = 6$ cm पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है–
(1) 10π (2) 12π
(3) 8π (4) 11π

4. यदि कोई फलन अन्तर्गत I में निरन्तर वर्धमान होगा यदि $x_1, x_2 \in I$ तथा $x_1 < x_2$ तब–
(1) $f(x_1) \le f(x_2)$ (2) $f(x_1) \ge f(x_2)$
(3) $f(x_1) < f(x_2)$ (4) $f(x_1) > f(x_2)$

5. निम्नलिखित में कौन से फलन $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है?
(1) cos x (2) sin x
(3) cos 3x (4) tan x

6. निम्नलिखित अंतरालों में से किस अंतराल में $f(x) = x^{400} + \sin x - 1$ द्वारा प्रदत फलन f ह्रासमान है?
(1) $(0,1)$ (2) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$
(3) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (4) इनमें से कोई नहीं

7. x के प्रत्येक मान के लिए फलन $f(x) = e^x$ है–
(1) ह्रासमान
(2) वर्धमान
(3) न ह्रासमान न वर्धमान
(4) उपर्युक्त सभी

8. एक गोलीय गुब्बारे की त्रिज्या 8 सेमी है उसके आयतन में परिवर्तन की दर त्रिज्या के सापेक्ष होगी –
(1) $\frac{218\pi}{3} cm^3/cm$ (2) $216\pi\ cm^3/cm$
(3) $\frac{256}{3} cm^3/cm$ (4) $256\pi\ cm^3/cm$

-: Answer :-

1-1, 2-2, 3-2, 4-3, 5-1, 6-4, 7-2, 8-4

9. फलन $f(x) = x^3 - 3x + 7$ के लिए क्रातिक बिन्दु.........है।

Ans. $x = \pm 1$

10. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर फलन e^x हमेशा...... होगा।

Ans. निरन्तर वर्धमान

11. किसी आयत की लम्बाई $x, \frac{3cm}{min}$ की दर से घट रही है तथा चौड़ाई $y, 2\frac{cm}{min}$ की दर से बढ़ रही है तब इसके परिधि में परिवर्तन.............है।

Ans. -2 cm / min

12. यदि $f(x) = -|x+1| + 3$ तो $f(x)$ का अधिकतम मान .... है।

Ans. दिया गया फलन $g(x) = -|x+1| + 3$
हम जानते है कि प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $|x+1| \ge 0$
$\Rightarrow$ प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $-|x+1| \le 0$
$\Rightarrow$ प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $-|x+1| + 3 \le 3$
g का उच्चतम मान तभी ज्ञात किया जा सकता
जब $|x+1| = 0$ या $x = -1$
अर्थात $|x+1| = 0 \Rightarrow x = -1$
$\therefore$ g का उच्चतम मान $= g(-1) = |-1+1| + 3 = 3$

13. एक वृत की त्रिज्या 0.7 सेमी/सेकण्ड की दर से वृद्धि हो रही है, तब वृत की परिधि में परिवर्तन की दर .... होगी।

Ans. मान लीजिए समय (t) पर वृत की त्रिज्या r है और इसकी परिधि c है।

तब $c = 2\pi r$

परिधि की वृद्धि की दर, $\frac{dc}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt}$ (t के सापेक्ष अवकलन करने पर, श्रृंखला नियम द्वारा)

जहां, $\frac{dr}{dt}$ त्रिज्या की वृद्धि की दर है।

$\therefore \frac{dr}{dt} = 0.7$ सेमी/से

$\frac{dc}{dt} = 2\pi(0.7)$ सेमी/से $= 14\pi$ सेमी/से ($\because \frac{dr}{dt} = 0.7$ सेमी/से, दिया है)

$\therefore$अतः परिधि की वृद्धि की दर 14π सेमी/से है।

14. सिद्ध कीजिए $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, x \in R$ पर निरन्तर वर्धमान फलन है?

हल : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$

$f^1(x) = 3x^3 - 6x + 4$

$f^1(x) = 3(x^2 - 2x + 1)$

$f^1(x) = 3(x-1)^2 + 1$

प्रत्येक $x \in R$ पर $(x-1)^2 \geq 0$

$3(x-1)^2 \geq 0$

$3(x-1)^2 + 1 > 0$

अतः f हमेशा निरन्तर वर्धमान फलन होगा।

15. अंतराल $[1,5]$ में $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ द्वारा प्रदत फलन के निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मानों को ज्ञात कीजिए।

Ans. हमें ज्ञात है

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$

या $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-3)(x-2)$

ध्यान दीजिए $f'(x) = 0$ से $x = 2$ और $x = 3$ प्राप्त होते हैं। अब हम इन बिन्दुओं और अंतराल $[1,5]$ के अंत्य बिन्दुओं अर्थात $x = 1, x = 2, x = 3$ और $x = 5$ पर f के मान का परिकलन करेंगे। अब

$f(1) = 2(1^3) - 15(1^2) + 36(1) + 1 = 24$

$f(2) = 2(2^3) - 15(2^2) + 36(2) + 1 = 29$

$f(3) = 2(3^3) - 15(3^2) + 36(3) + 1 = 28$

$f(5) = 2(5^3) - 15(5^2) + 36(5) + 1 = 56$

इस प्रकार, हम निष्कर्ष पर पहुंचते है कि अंतराल $[1,5]$ पर फलन f के लिए $x = 5$ पर निरपेक्ष उच्चतम मान 56 और $x = 1$ पर निरपेक्ष निम्नतम मान 24 है।

16. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$ द्वारा प्रदत फलन f वर्धमान या ह्रासमान है।

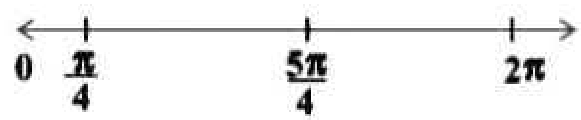
Ans. ज्ञात है कि

$f(x) = \sin x + \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$

या $f'(x) = \cos x - \sin x$

अब $f'(x) = 0$ से $\sin x = \cos x$ जिससे हमें $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ प्राप्त होते हैं। क्योंकि $0 \leq x \leq 2\pi$

बिन्दु $x = \frac{\pi}{4}$ और $x = \frac{5\pi}{4}$ अंतराल $[0,2\pi]$ को तीन असंयुक्त अंतरालों, नामतः $\left[0,\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ और $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ में विभक्त करते हैं।



ध्यान दीजिए कि $f'(x) > 0$ यदि $x \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$

अतः अंतरालों $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ और $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ में फलन f वर्धमान है।

और $f'(x) < 0$, यदि $x \in \left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

अतः f अंतराल $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ में ह्रासमान है।

17. दिखाइए कि प्रदत फलन f,

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, x \in R$

R परवर्धमान फलन है।

Ans. ध्यान दीजिए कि

$f(x)=3x^2-6x+4$

$=3(x^2-2x+1)+1$

$=3(x-1)^2+1>0$, सभी $x\in R$ के लिए

इसलिए फलन f, R पर वर्धमान है।

18. सिद्ध कीजिए कि प्रदत फलन $f(x)=\cos x$

$(a)(0,\pi)$ में ह्रासमान है

$(b)(\pi,2\pi)$ में वर्धमान है

$(c)(0,2\pi)$ में न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान है।

Ans. ध्यान दीजिए कि $f'(x)=-\sin x$

(a) चूंकि प्रत्येक $x\in(0,\pi)$ के लिए $\sin x>0$, हम पाते हैं कि $f'(x)<0$ और इसलिए $(0,\pi)$ में f ह्रासमान है।

(b) चूंकि प्रत्येक $x\in(\pi,2\pi)$ के लिए $\sin x<0$, हम पाते है कि $f'(x)>0$ और इसलिए $(\pi,2\pi)$ में f वर्धमान है।

(c) उपरोक्त (a) और (b) से स्पष्ट है कि $(0,2\pi)$ में f न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

19. वे अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x)=4x^3-6x^2-72x+30$ द्वारा प्रदत फलन f (a) वर्धमान (b) ह्रासमान हैं।

Ans. यहां

$f(x)=4x^3-6x^2-72x+30$

या $f'(x)=12x^2-12x-72$

$=12(x^2-x-6)$

$=12(x-3)(x+2)$

इसलिए $f'(x)=0$ से $x=-2,3$ प्राप्त होते हैं। $x=-2$ और $x=3$ वास्तविक रेखा को तीन असंयुक्त अंतरालों, नामतः $(-\infty,2),(-2,3)$ और $(3,\infty)$ में विभक्त करता है (चित्रानुसार)

अंतरालों $(-\infty,-2)$ और $(3,\infty)$ में $f'(x)$ धनात्मक है जबकि अंतराल $(-2,3)$ में $f'(x)$ ऋणात्मक है। फलस्वरूप फलन f अंतरालों $(-\infty,-2)$ और $(3,\infty)$ में वर्धमान है जबकि अंतराल $(-2,3)$ में फलन ह्रासमान हैं तथापि f, R पर न तो वर्धमान है ओर न ही ह्रासमान है।

20. ऐसी दो संख्याएं ज्ञात कीजिए, जिनका योग 24 है और जिनका गुणनफल उच्चतम हो।

Ans. सब से पहले हम दो संख्या x और $(24-x)$ मानते है फिर हम $y=x(24-x)$ मानते हैं अब अवकलन का अनुप्रयोग करके दोनों संख्या ज्ञात करते है।

मान लीजिए पहली संख्या x है, तब दूसरी संख्या $(24-x)$ है।

($\because$ दो संख्याओं का योग 24 है)

यदि y के सापेक्ष का गुणनफल को दर्शाता है तो

$$y=x(24-x)=24x-x^2$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx}=24-2x$ और $\frac{d^2y}{dx^2}=-2$

अब $\frac{dy}{dx}=0$ रखने पर

$\Rightarrow\ 24-2x=0$

$\therefore\ x=12$

$x=12$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2}=-2<0$

इसलिए संख्याओं का गुणनफल उच्चतम होगा जब संख्या $x=12$ होगी और $24-12=12$ इसलिए संख्याए 12 और 12 है।

21. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=\log|\cos x|\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में निरन्तर ह्रासमान और $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में निरन्तर वर्धमान है।

Ans. दिया है, $f(x)=\log(\cos x)$

$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\tan x$ (x के सापेक्ष अवलन करने पर)

अंतराल $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में, $\tan x>0$

($\because \tan x$ प्रथम चतुर्थांश में है)

$\Rightarrow\ -\tan x<0$ ($\because \tan x$ प्रथम चतुर्थांश में है)

$\therefore\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में, $f'(x)<0$

अतः $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में f निरन्तर ह्रासमान है।

अब अंतराल $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में $\tan x < 0$

$\Rightarrow \; -\tan x > 0$

($\because \tan x$ द्वितीय चतुर्थांश में है)

$\therefore \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में $f'(x) > 0$

इसलिए, $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में f निरन्तर वर्धमान है।

22. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log\sin x, \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में निरन्तर वर्धमान और $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में निरन्तर ह्रासमान है।

Ans. दिया है, $f(x) = \log(\sin x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x}(\cos x) = \cot x$$

(x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

अंतराल $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में, $f(x) = \cot x > 0$

क्योंकि $\cot x$ प्रथम चतुर्थांश में धनात्मक होता है।

$\therefore \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में f निरन्तर वर्धमान है।

अंतराल $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में, $f'(x) = \cot x < 0$

क्योंकि $\cot x$ द्वितीय चतुर्थांश में ऋणात्मक है।

$\therefore \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ पर f निरन्तर ह्रासमान है।

23. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें निम्नलिखित फलन f निरंतर वर्धमान या ह्रासमान है।

(i) $f(x) = x^2 + 2x + 5$ (ii) $f(x) = 10 - 6x - 2x^2$

Ans. (i) मान लीजिए कि $f(x) = x^2 + 2x + 5$

$\therefore \; f'(x) = 2x + 2 = 0$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$f'(x) = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow 2x = -2, x = -1$

$x = -1$ वास्तविक रेखा को दो अंतराल $(-\infty, -1)$ और $(-1, \infty)$ में विभाजित करती है

अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$(-\infty, -1)$	– ve	निरंतर ह्रासमान
$(-1, \infty)$	+ ve	निरंतर वर्धमान

अतः जब $x > -1$ तो $f(x)$ निरंतर वर्धमान है और जब $x < -1$, तो $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है

(ii) मान लीजिए $f(x) = 10 - 6x - 2x^2$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 0 - 6 - 2\cdot 2x = -6 - 4x$

$f'(x) = 0$ रखने पर,

$$-6 - 4x = 0, \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

जो वास्तविक रेखा को दो अंतराल $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ और $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ में विभाजित करता है।

अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$	– ve	निरंतर वर्धमान
$\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$	– ve	निरंतर ह्रासमान

इसलिए, $x < -\frac{3}{2}$ के लिए f निरंतर वर्धमान है और $x > -\frac{3}{2}$ के लिए f निरंतर ह्रासमान है

24. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, की त्रिज्या परिवर्तनशील है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 10 सेमी है।

Ans. मान लीजिए कि गोलाकार गुब्बारे की त्रिज्या r और आयतन V है।

तब, $r = 10$ सेमी और $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

त्रिज्या r के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर

$\frac{dV}{dr} = \left(\frac{4}{3}\pi\right)3r^2$ (r के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$= 4\pi r^2 = 4\pi(10)^2 = 400\pi$

($\because r = 10$ सेमी)

अतः गुब्बारे का आयतन 400π सेमी³/सेमी की दर से बढ़ रहा है।

25. एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन से संबंधित कुल लागत $c(x)$ (रुपये में) $c(x)=0.007x^3-0.003x^2+15x+4000$ से प्रदत है।
सीमांत लागत ज्ञात कीजिए, जबकि 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है।
सीमांत लागत परिणाम के सापेक्ष कुल लागत के परिवर्तन की दर है।

Ans. सीमांत लागत $=\frac{dc}{dt}$

$\frac{dc}{dt}=0.007(3x^2)-0.003(2x)+15=0.021x^2-0.006x+15$

जब $x=17$, सीमांत लागत $=0.021(17)^2-0.006(17)+15$

$=0.021(289)-0.006(17)^2+15=6.069+0.102+15=20.967$

अतः जब 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है, तो सीमांत लागत 20.967 रुपये है।

26. सिद्ध कीजिए $f(x)=\sin x$ से प्रदत फलन

(i) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान है।

(ii) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान

(iii) $(0,\pi)$ में न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान है।

Ans. दिया गया फलन $f(x)=\sin x$ है।
x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x)=\cos x$$

(i) अतः प्रत्येक $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ के लिए $\cos x>0$

($\therefore \cos x$ प्रथम चतुर्थांश में धनात्मक है)

$$f'(x)>0$$

इसलिए, $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान है।

(ii) अतः, प्रत्येक $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ के लिए $\cos x<0$

($\therefore \cos x$ द्वितीय चतुर्थांश में धनात्मक है)

$$f'(x)<0$$

इसलिए, $f,\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

(iii) जब $x\in(0,\pi)$ हम देखते है कि $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में $f'(x)>0$

और $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ में $f'(x)<0$

इसलिए $f'(x),(0,\pi)$ में धनात्मक और ऋणात्मक है।

इसलिए $(0,\pi)$ में $f(x)$ न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

27. एक आयत की लम्बाई x,5 सेमी/मिनट की दर से घट रहा है और चौड़ाई y,4 सेमी/मिनट की दर से बढ़ रही है। जब $x=8$ सेमी और $y=6$ सेमी है, तब आयत के (a) परिमाप (b) क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

Ans. मान लीजिए कि किसी समय t पर, आयत की लम्बाई, चौड़ाई, परिमाप और क्षेत्रफल क्रमशः x,y,P और A है, तब $P=2(x+y)$ और $A=xy$ 1

आयत का परिमाप = 2(लम्बाई + चौड़ाई) और क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

यह दिया है कि $\frac{dx}{dt}=-5$ सेमी/मिनट

($-ve$ चिन्ह दर्शाता है कि लम्बाई घट रही है)

और $\frac{dy}{dt}=4$ सेमी/मिनट

(a) अब, $P=2(x+y)$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

परिमाप के परिवर्तन की दर $\frac{dP}{dt}=2\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)$

$=2(-5+4)$ सेमी/मिनट $=-2$ सेमी/मिनट

$\left(\therefore \frac{dx}{dt}=-5\ \&\ \frac{dy}{dt}=4\right)$

अतः, आयत का परिमाप 2 सेमी/मिनट की दर से घट ($-ve$ चिन्ह) रहा है।

(b) यहां, आयत का क्षेत्रफल $A=xy$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर $\frac{dA}{dt}=x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dA}{dt}=8\times4+6\times(-5)$$

$$\left(\because \frac{dx}{dt}=-5 \,\&\, \frac{dy}{dt}=4\right)$$

$-32-30=2$ सेमी² / मिनट

अतः, आयत का क्षेत्रफल 2 सेमी² / मिनट की दर से बढ़ रही है।

नोट– यदि परिवर्तन की दर बढ़ रही है, तो हम ($+ve$ चिन्ह) लेते है और यदि परिवर्तन की दर घट रही है तो हम ($-ve$ चिंन्ह) लेते है।

28. निम्नलिखित दिए गए फलनों के उच्चतम या निम्नतम मान, यदि कोई हो तो, ज्ञात कीजिए।

$f(x)=|x+2|-1$

Ans. दिया गया फलन $f(x)=|x+2|-1$

हम जानते है कि प्रत्येक $x\in R$ के लिए, $|x+2|\geq 0$

इसलिए, प्रत्येक $x\in R$ के लिए, $f(x)=|x+2|-1\geq -1$

f का न्यूनतम मान तभी ज्ञात किया जा सकता है जब $|x+2|=0$

अर्थात $|x+2|=0 \Rightarrow x=-2$

$\therefore f$ का न्यूनतम मान $=f(-2)=|-2+2|-1=0-1=-1$

इसलिए, $f(x)$ का न्यूनतम मान –1 है लेकिन $x=2$ पर कोई उच्चतम मान नहीं है।

29. फलन $f(x)=\sin x+\cos x \quad x\in[0,\pi]$ का निरपेक्ष उच्चतम व निरपेक्ष निम्नतम मान ज्ञात करों?

हलः– $f(x)=\sin x+\cos x$

$= f'(x)=\cos x-\sin x$

$f'(x)=0$ पर $\cos x - \sin x=0$

$\cos x=\sin x$

$\tan x=1$

$\frac{\pi}{4}\in[0,\pi]$

अतः $x=0$ पर $f(0)=\sin 0+\cos 0=1$

$x=\frac{\pi}{4}$ पर $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}=\sqrt2$

$x=\pi$ पर $f(\pi)=\sin\pi+\cos\pi=-1$

अतः निरपेक्ष निम्नतम मान = –1

निरपेक्ष उच्चतम मान = $\sqrt2$

30. एक परिवर्तनशील घन का किनारा 3 cm/sec की दर से बढ़ रहा है घन आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि किनारा 10 cm लम्बा है।

हलः– घन का किनारा (भुजा) = 10 सेमी.

$\Rightarrow x=10$ cm

तथा $\frac{dx}{dt}=\frac{3\text{ cm}}{\text{sec}}$

घन का आयतन $V=x^3$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$=\frac{dV}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dV}{dt}=3(10)^2\times3=900\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$

अतः घन का आयतन $900\frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$ की दर से बढ़ रहा है।

31. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है की त्रिज्या परिवर्तनशील है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 10 सेमी. है?

हलः– गोलाकार गुब्बारे की त्रिज्या $x=10$ cm

गुब्बारे का आयतन $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

r के सापेक्ष अवकलन करने पर $\frac{dv}{dr}=4\pi r^2$

$=\frac{dv}{dr}=4\pi(10)^2$

$=400\pi\frac{\text{cm}^3}{\text{cm}}$

अतः गोलाकार गुब्बारे का आयतन $400\pi\frac{\text{cm}^3}{\text{cm}}$ की दर से बढ़ रहा है।

32. अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x)=\sin x+\cos x$ निरन्तर ह्रासमान है जहॉ $x\in(\pi,2\pi)$ है?

हलः– $f(x)=\sin x+\cos x$

$f'(x)=\cos x-\sin x$

$= f'(x)=0$ पर $\cos x-\sin x=0$

$= \tan x=1$

$= x=\frac{5\pi}{4}\in(\pi,2\pi)$

$$\begin{array}{ccccc} & - & & + & \\ \hline \pi & & \frac{5\pi}{4} & & 2\pi \end{array}$$

अन्तराल $\left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ के बिन्दु $x = 210^0$ पर

$$f'(210)^o = \cos\ 210 - \sin\ 210$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = -ive$$

अतः अन्तराल $\left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$ में फलन निरन्ततर ह्रासमान होगा।

33. फलन $f(x) = \log(\sin x)$ अन्तराल .... में ह्रासमान होगा? जबकि $0 \le x \le \pi$

Ans. $f(x) = \log(\sin x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$$

ह्रासमान के लिए $f' < x < 0$

$\cot x < 0$

अर्थात् $\cot x$ का मान ऋणात्मक है।

हम जानते है कि $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में $\cot x$ का मान ऋणात्मक होता है।

$\therefore$ $f(x) = \log(\sin x)$ अन्तराल $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में ह्रासमान होगा।

34. एक घन के आयतन में सकी भुजा x के सापेक्ष परिवर्तन की दर .... होगी।

Ans. घन का आयतन $V = x^3$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = 3x^2$$

35. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है एक पंप द्वारा $900\ cm^3$ गैस प्रति सेकण्ड से भर कर फुलाया जाता है। गुब्बारें की त्रिज्या के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 15 सेमी है।

Ans. यदि t समय पर गुब्बारे की त्रिज्या r तथा आयतन v है तब

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow 900\ cm^3/sec = \left(\frac{4}{3}\pi\right)\left[3 \times (15)^2\frac{dr}{dt}\right]$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{900}{4\pi \times 15 \times 15} = \frac{1}{\pi}\ cm/sec$$

$\therefore$ गुब्बारे की त्रिज्या में वृद्धि दर $= \frac{1}{\pi}\ cm/sec.$

अध्याय – 7
समाकलन

अंकभार (1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 12)

बहुविकल्पीय प्रश्नः—

1. $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2} dx$ का मान है?

(1) tan x - sec x + c (2) tan x + sec x + c
(3) - tan x + sec x + x (4) none of these

2. $\int \frac{\cos ec^2 \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} dx$ का मान है

(1) $-\cot\frac{x}{2} - x + c$ (2) $-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - x + c$
(3) $-2\cot\frac{x}{2} - x + c$ (4) $2\cot\frac{x}{2} - x + c$

3. $\frac{d}{dx}[f(x)] = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$ तथा $f(2) = 0$ तब $f(x)$ है?

(1) $x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$ (2) $x^3 + \frac{1}{x^4} + \frac{129}{8}$
(3) $x^4 + \frac{1}{x^3} + \frac{129}{8}$ (4) None of these

4. $\int \frac{dx}{x + x\log x}$ का मान है?

(1) $(1+\log x) + c$ (2) $\log_{10}(1+\log x) + c$
(3) $\log_e(1+\log x) + c$ (4) $\log_e(\log x) + c$

5. $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{1+x-x^2}\right)dx$ है?

(1) 1 (2) 0 (3) −1 (4) $\frac{\pi}{4}$

6. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x\cos x + \tan^5 x + 1)dx$ है?

(1) 0 (2) 2
(3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

7. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान है?

(1) 0 (2) $\frac{\pi}{2}$
(3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

8. $\int \frac{e^{5\log x} - e^{3\log x}}{e^{3\log x} - e^{2\log x}} dx$ है?

(1) $x + 1 + c$ (2) $\frac{x^2}{2} + x + c$
(3) $x^2 + x + c$ (4) $2x + x + c$

9. $\int e^x \sec x(1+\tan x)dx$ है?

(1) $e^x \cos x + c$ (2) $e^x \sin x + c$
(3) $e^x \sec x + c$ (4) $e^x \tan x + c$

10. $\int \cos^2 2x \, dx$ है?

(1) $\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x + c$ (2) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 4x + c$
(3) $x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$ (4) $\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x + c$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x - 4x^2}}$ का मान है?

(1) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right) + c$ (2) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right) + c$
(3) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right) + c$ (4) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right) + c$

12. $f(a+b-x) = f(x)$ तब $\int_a^b x\, f(x)\, dx$ है?

(1) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(a+b+c)dx$ (2) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$
(3) $\frac{a-b}{2}\int_a^b f(x)dx$ (4) $\frac{a+b}{4}\int_a^b f(x)dx$

13. $\int \log_{10} x \, dx$ का मान है?

(1) x log x - x+c (2) $\frac{1}{x}$

(3) $\log_e 10(x\log x - x + c)$ (4) $\log_{10} e(x\log x - x) + c$

14. $\int \log_x x \, dx$ का मान है?

(1) 1 (2) 0

(3) x + c (4) c

15. $\int \sin x^o dx$ बराबर है?

(1) $\frac{180}{\pi}\cos x^o + c$ (2) $-\frac{180}{\pi}\cos x^o$

(3) $-\frac{180}{\pi}\cos x + c$ (4) $-\frac{180}{\pi}\cos x^o + c$

-: Answer key :-

1-1, 2-3, 3-1, 4-3, 5-2, 6-4, 7-3, 8-2, 9-3, 10-1, 11-2, 12-2, 13-4, 14-3, 15-4

रिक्त स्थान की पुर्ति कीजिए—

1. फलन $x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ का समाकलन........... है।

2. $\int \sec x(\sec x - \tan x)dx$ का मान .... है।

3. $\int_2^3 x^2 dx$ का मान................ है।

4. यदि f एक विषम फलन है तब $\int_{-5}^{5} f(x)dx =$.................. होगा।

5. $\int_6^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}dx =$.................... है।

6. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)dx$ का मान...................... है।

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x \cos^2 2x}$ का मान .... है

8. $\int \sqrt[3]{x^5}dx$ का मान .... है।

9. $\int 5^{-\log_5 x}dx$ का मान...................... है।

10. $\int \frac{x}{1+x^2}dx$ का मान............... है।

11. $\int \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$ का मान .... है।

उत्तरमाला :—

1. $\frac{x^3}{3} - x + c$
2. $\tan x - \sec x + c$
3. $\frac{19}{3}$
4. 0
5. $\frac{\pi^2}{32}$
6. log 2
7. $\frac{1}{2}[\tan 2x - \cot 2x] + C$ या $\log(\operatorname{cosec} 4x - \cot 4x) + C$
9. $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + C$
9. $-\frac{1}{x} + C$
10. $\frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$
11. $\frac{1}{1+\cos x} + c$

अतिलघुतरात्मक प्रश्न :—

1. $\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ का मान ज्ञात करों।

हलः— यहाँ $f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$ है जो किस विषम फलन है।

अतः— $d = 0$

2. $I = \int \frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}dx$ का घन हैं?

हलः— $I = \int \frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}dx$

माना $3\cos x + 2\sin x = t$

$(-3\sin x + 2\cos x)dx = dt$

$I = \int \frac{dt}{2t}$

$I = \frac{1}{2}\log(t) + c$

$I=\frac{1}{2}\log\left(3\cos x+2\sin x\right)+c$

2. $I=\int\cos(\sin^{-1}x)dx$ का मान है?

हलः– माना $\sin^{-1}x=\theta$

$\Rightarrow x=\sin\theta$ तब $\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$

$I=\int\cos\left[\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}\right]dx$

$I=\int\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx$

$I=\boxed{\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}x+c}$

4. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+x}dx$

हलः– $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left[1+\sqrt{x}\right]}dx$

माना $1+\sqrt{x}=t$ तब $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt$

$I=2\int\frac{dt}{t}$

$I=2\log t+c$

$=2\log(1+\sqrt{x})+c$

5. $I=\int\frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$

हलः– $I=\int\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$

$=\int\tan^2\frac{x}{2}dx$

$=\int\left(\sec^2\frac{x}{2}-1\right)dx$

$=\boxed{2\tan\frac{x}{2}-x+c}$

6. $\int\frac{\sin^2 x\ dx}{1+\cos x}$

हलः– $\int\frac{(1-\cos^2 x)dx}{1+\cos x}$

$=\int\frac{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)}dx$

$=\int(1-\cos x)dx$

$=\boxed{x-\sin x+c}$

7. $\int x^2e^{x^3}dx$

हलः– माना $x^3=t$

$\Rightarrow 3x^2dx=dt$ अतः $\frac{1}{3}\int e^t\ dt=\frac{1}{2}e^t+c$

$=\boxed{\frac{1}{3}e^{x^3}+c}$

8. $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{2}{x}dx$ का मान ज्ञात करो?

Sol. $I=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{2}{x}dx$

$I=2\left[\log x\right]_1^{\sqrt{2}}$

$I=2\left[\log\sqrt{2}-\log(1)\right]$

$I=2\log\sqrt{2}-0$

$\boxed{I=\log 2}$

9. $\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$ का मान है?

हलः– $I=\int\frac{dx}{e^x-\frac{1}{e^{-x}}}$

$I=\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$

माना $e^x=t\Rightarrow e^x dx=dt$

$I=\int\frac{dt}{t^2+1}$

$=\tan^{-1}(t)+c$

$=\tan^{-1}(e^x)+c$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\ dx$

हलः– $=\left[\log\sec\ x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \log\left(\sec\frac{\pi}{4}\right) - \log(\sec 0)$

$= \log\left(\sqrt{2}\right) - \log(1)$

$= \frac{1}{2}\log 2$

लघुउत्तरीय प्रश्नः–

1. $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

हलः– माना $\sin^{-1} x = t$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$

अतः– $I = \int t\ dt$

$I = \frac{t^2}{2} + c$

$I = \frac{(\sin^{-1} x)^2}{2} + c$

2. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 4}} dx$

हलः– माना $\tan x = t$

$\sec^2 dx = dt$

$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2^2}}$

$= \log\left[t + \sqrt{t^2 + 4}\right] + c$

$= \log\left[\tan x + \sqrt{\tan^2 + 4}\right] + c$

3. $I = \int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$

$= \int \frac{(x+1-1)e^x}{(x+1)^2} dx$

$= \int e^x \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx$

सुत्र – $\int e^x \left[f(x) + f^1(x)\right] dx = e^x f(x) + c$

अतः– $I = \frac{e^x}{1+x} + c$

4. $I = \int_0^1 x\ e^{x^2} dx$

हलः– माना $x^2 = t \Rightarrow 2x\ dx = dt$

अब $x = 0$ पर $t = 0$ तथा $x = 1$ पर $t =$

$I = \frac{1}{2}\int_0^1 et\ dt$

$I = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_1^0$

$= \frac{1}{2}[e-1] + c$

5. $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\ dx$

हलः– $\sin^2 x$ एक सम फलन है।

अतः– $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x + x$

$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx$

$I = \left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} - (0-0)$

$= \boxed{I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$

दीर्घउत्तरीय प्रश्नः–

1. समाकलन $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ ज्ञात कीजिए–

हलः– $I = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-\left[x^2+4x-5\right]}}$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-\left[x^2+4x-5+4-4\right]}}$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-\left[(x+2)^2-9\right]}}$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$$

$$I=\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$$

2. $\int\frac{dx}{\left(e^x-1\right)}$ का मान ज्ञात करों?

हलः– $I=\int\frac{dx}{\left(e^x-1\right)}$

$$I=\int\frac{e^x dx}{e^x\left(e^x-1\right)}$$

माना $e^x=t \Rightarrow e^x dx=dt$

$$I=\int\frac{dt}{t(t-1)}$$

$$I=\int\frac{dt}{t^2-t}$$

$$I=\int\frac{dt}{t^2-t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}$$

$$I=\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$I=\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}\log\left[\frac{t-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right]+C$$

$$I=\log\left[\frac{t-1}{t}\right]+C$$

$$I=\log\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)+C$$

नोटः– इस सवाल को आंशिक भिन्न द्वारा भी हल कर सकते है।

3. समाकलन $\int\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ को हल कीजिए–

हलः– $I=\int\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

माना $\sin^{-1}x=t$

$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=dt$ तब $x=\sin t$

अतः $\int t \quad \sin t \ dt$

$$I=t\times(-\cos t)-\int(1\times-\cos t)dt$$

$$I=-t\cos t+\sin t+c$$

$$I=-\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x+x+c$$

4. $\int\frac{\sin x}{\sin(x-a)}dx$

$x-a=t$

$\Rightarrow dx=dt$

$$I=\int\frac{\sin(t+a)}{\sin t}dt$$

$$I=\int\frac{\sin t\cos a+\cos t\sin a}{\sin t}dt$$

$$I=\int(\cos a+\sin a\cot t)dt$$

$$I=t\cos a+\sin a\log\sin t+c$$

$$I=(x-a)\cos a+\sin a\log\sin(x-a)+c$$

$$I=x\cos a+\sin\log\sin(x-a)+c_1$$

जहाँ $c_1=c-a\cos a$

5. $\int_0^4|x-1|dx$ ज्ञात कीजिए–

हलः– $\int_0^4|x-1|dx \qquad |x-1|=\begin{cases}-(x-1) & x\\ (x-1) & x\end{cases}$

अतः– $f(x)=\int_0^1-(x-1)dx+\int_1^4(x-1)dx$

$$I = -\left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^4$$

$$I = -\left[\left(\frac{1}{2} - 1\right) - 0\right] + \left[\left(\frac{16}{2} - 4\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{2} + \left[4 + \frac{1}{2}\right] = 5$$

6. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)} dx$ का मान ज्ञात करो?

Sol. माना $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \; dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$

माना $\sin x = t$

अतः $\cos x \, dx = dt$

यदि $x = 0$ तब $t = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ तब $t = 1$

अतः $I = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\,(2+t)}$

आंशिक भिन्नों में वियोजित करने पर

$$\frac{1}{(1+t)\,(2+t)} = \frac{A}{(1+t)} + \frac{B}{(2+t)}$$

$\Rightarrow$ $1 = A(2 + t) + B(1 + t)$

$t = -1$ पर $\boxed{A = 1}$

$t = -2$ पर $\boxed{B = -1}$

अतः $I = \int_0^1 \left[\frac{1}{(1+t)} - \frac{1}{(2+t)}\right] dt$

$I = [\log(1+t) - \log(2+t)]_0^1$

$I = (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2)$

$I = 2\log 2 - \log 3$

$I = \log 4 - \log 3$

$\Rightarrow \boxed{I = \log\frac{4}{3}}$

7. $\int \frac{\cos 2x \;\; dx}{(\cos x + \sin x)^2}$ का मान ज्ञात करो?

Sol. माना $I = \int \frac{\cos 2x \;\; dx}{(\cos x + \sin x)^2}$

$$I = \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)dx}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$I = \int \frac{(\cos x + \sin x)\,(\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2} dx$$

$$I = \int \frac{(\cos x - \sin x)\,dx}{(\cos x + \sin x)}$$

माना $\cos x + \sin x = t$

$\Rightarrow$ $(-\sin x + \cos x)\, dx = dt$

अतः $I = \int \frac{dt}{t}$

$I = \log t + c$

$\boxed{I = \log(\cos x + \sin x) + c}$

8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\cot x}}$ का मान होगा।

हलः– माना $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\cot x}}$

$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cot x}} dx$ ——— समीकरण (1)

P_3 गुणधर्म लगाने पर

$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$ ——— समीकरण (2)

समीकरण (1) + समीकरण (2) से –

$$2I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1) dx$$

$$2I=[x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$2I=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2I=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{12}$$

निम्बन्धात्मक प्रश्न :—

1. $x\ \tan^{-1} x$ का समाकलन ज्ञात कीजिए।

हलः—माना $I=\int x\tan^{-1}dx$

$$I=\tan^{-1}x\times\frac{x^2}{2}-\int\left(\frac{1}{1+x^2}\times\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$I=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{x^2+1}$$

$$I=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$I=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}-\frac{1}{2}\int 1\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$I=\frac{x^2}{2}\tan^{-1}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$$

2. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\sin(x+\alpha)}}$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\,[\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha}}$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^4 x\,[\cos\alpha+\cot x\sin\alpha}}$$

$$I=\int\frac{\operatorname{cosec}^2 x\,dx}{\sqrt{\cos\alpha+\cot x\sin\alpha}}$$

माना :—

$$\cos\alpha+\cot x\sin\alpha=1$$

$$\Rightarrow -\sin\alpha\operatorname{cosec}^2 x\,dx=dt$$

$$I=-\frac{1}{\sin\alpha}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$I=-\frac{1}{\sin\alpha}\times 2\sqrt{t}+c$$

$$I=\frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\cos\alpha+\cot x\sin\alpha}+c$$

$$I=\frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\cos\alpha+\frac{\cos x}{\sin x}\sin\alpha}+c$$

$$I=\frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha}{\sin x}}+c$$

$$I=\frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}}+c$$

3. $I=\int\frac{(x+2)dx}{2x^2+6x+5}$

हलः— माना $x+2=A\frac{d}{dx}(2x^2+6x+5)+B$

$$x+2=A(4x+6)+B$$

तुलना करने पर

$$4A=1\Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

तथा $6A+B=2\Rightarrow B=\frac{1}{2}$

अतः— $I=\int\frac{\frac{1}{4}(4x+6)+\frac{1}{2}}{2x^2+6x+5}dx$

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{(4x+6)}{2x^2+6x+5}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2x^2+6x+5}$$

$I=\frac{1}{4}I_1+\frac{1}{2}I_2$ ———————— समीकरण (1)

अब $I_1=\int\frac{(4x+6)dx}{2x^2+6x+5}$

माना $2x^2+6x+5=t$

$$(4x+6)dx=dt$$

$$I_1\int\frac{dt}{t}=\log t+c_1$$

$$\boxed{I_1=\log(2x^2+6x+5)+c_1}$$

अब $I_2=\int\frac{dx}{2x^2+6x+5}$

$$I_2=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}}$$

$$I_2=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}}$$

$$I_2=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+\frac{1}{4}}$$

$$I_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{1}{2}}\tan^{-1}\left[\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right]+C_2$$

$$\boxed{I_2=\tan^{-1}\left[2x+3\right]+C_2}$$

अतः $I=\frac{1}{4}\log(2x^2+6x+5)+\frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+3)$

4. $\int\frac{(2\sin\theta-2)\cos\theta\ d\ \theta}{5-\cos^2\theta-4\sin\theta}$ का मान ज्ञात करो?

हलः– माना $I=\int\frac{(2\sin\theta-2)\cos\theta\ d\ \theta}{5-\cos^2\theta-4\sin\theta}$

$$I=\int\frac{(2\sin\theta-2)\cos\theta\ d\ \theta}{5-1+\sin^2\theta-4\sin\theta}$$

माना $\sin\theta=t$

$\Rightarrow\cos\theta\ d\theta=dt$

$$I=\int\frac{(3t-2)}{t^2-4t+4}$$

$$I=\int\frac{(3t-2)}{(t-2)^2}dt$$

आंशिक भिन्न में नियोजित करने पर

$$=\frac{3t-2}{(t-2)^2}=\frac{A}{(t-2)}+\frac{B}{(t-2)^2}$$

$$=\boxed{(3t-2)=A(t-2)+B}$$

$t=0$ पर $-2=-2A+B$

$t=2$ पर $4=B$

अतः $A=3$

अत : $I=3\int\frac{dt}{(t-2)}+4\int\frac{dt}{(t-2)^2}$

$$I=3\ \log l(t-2)\ \frac{-4}{(t-2)}+c$$

$$\boxed{I=3\log(\sin\theta-2)-\frac{4}{(\sin\theta-2)}+C}$$

5. सिद्ध कीजिए $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)dx=\frac{\pi}{8}\log 2$

Sol. माना $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)dx$ ——————— (1)

xqk/keZ P_4 लगाने पर

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right]dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left[1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left[\frac{1+\tan x+1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log\left[\frac{2}{1+\tan x}\right]dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\log 2-\log(1+\tan x)\right]dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log 2dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)dx$$

$I=\log 2\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-I$ समीकरण (1) से

$$2I=\log 2\left[\frac{\pi}{4}-0\right]$$

$$\boxed{I=\frac{\pi}{8}\log 2}$$

6. $\int_0^{\pi}\frac{x\ dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}dx$ का मान ज्ञात करो?

Sol. $I=\int_0^{\pi}\frac{x\ dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}dx$ ——————— (1)

गुणधर्म P_4 लगाने पर

$$I = \int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)dx}{a^2\cos^2(\pi-x)+b^2\sin^2(\pi-x)}$$

$$I = \pi\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}-\int\frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$$

$$I = \pi\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$$

$$\because \int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx$$

यदि F(2a - x) = F (x)

अत: यहाँ $F(x) = \dfrac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$

$$F(\pi-x) = \frac{1}{a^2\cos^2(\pi-x)+b^2\sin^2(\pi-x)}$$

$$\Rightarrow F(\pi-x) = \frac{1}{a^2\cos^2+b^2\sin^2 x} = F(x)$$

अत: $2I = \pi\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$

$$\Rightarrow I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2+b^2\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x\,dx}{a^2+b^2\tan^2 x}$$

($\cos^2 x$ का अंश व हर में भाग लगाने पर)

माना $b\tan x = t$ यदि $x = 0$ तब $t = 0$

$\Rightarrow b\sec^2 x\,dx = dt$ $x = \dfrac{\pi}{2}$ तब $t = \infty$

अत: $I = \dfrac{\pi}{b}\int_0^{\infty}\dfrac{dt}{a^2+t^2}$

$$I = \frac{\pi}{b}\times\frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{t}{a}\right]_0^{\infty}$$

$$I = \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}0\right]$$

$$I = \frac{\pi}{ab}\left[\frac{\pi}{2}-0\right]$$

$$I = \frac{\pi^2}{2ab}$$

7. समाकलन $\int_0^{\pi}\dfrac{x\tan x\,dx}{\sec x+\tan x}$ का मान ज्ञात करो?

Sol. माना $I = \int_0^{\pi}\dfrac{x\tan x\,dx}{\sec x+\tan x}$

$$I = \int_0^{\pi}\frac{x\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$I = \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin x}dx \text{ ------ } (1)$$

P_4 गुणधर्म लगाने पर

$$I = \int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\sin(\pi-x)}dx$$

$$I = \int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\sin x}dx$$

$$I = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,dx}{1+\sin x}$$

$$I = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}-I$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x(1-\sin x)dx}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi}\frac{(\sin x-\sin^2 x)dx}{1-\sin^2 x}$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi}\left[\sec x\tan x-\tan^2 x\right]dx$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi}\left[\sec x\tan x-\sec^2 x+1\right]dx$$

$$2I = \pi\left[\sec x-\tan x+x\right]_0^{\pi}$$

$$2I = \pi\left[\sec\pi-\tan\pi+\pi\right]-\pi\left[\sec 0-\tan 0+0\right]$$

$$2I = \pi\left[-1-0+\pi\right]-\pi\left[1-0+0\right]$$

$$2I = -\pi+\pi^2-\pi$$

$2I = \pi^2 - 2\pi$

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{2} - \pi}$$

8. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात करों?

हलः— माना $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$

x के निष्कासन नियम से —

$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

माना $\cos x = t$ तथा $x = 0$ पर $t = 1$

$-\sin x \; dx = dt$ $\quad x = \pi$ पर $t = -1$

$I = -\frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2}$

$I = -\frac{\pi}{2} \left[\tan^{-1}\right]_1^{-1}$

$I = -\frac{\pi}{2} \left[\tan^{-1}(-1) - \tan^{-1} 1\right]$

$I = -\frac{\pi}{2} \left[-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right]$

$I = \frac{-\pi}{2} \times \frac{-\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

9. $\int \frac{(2\sin\theta - 2)\cos\theta \; d\theta}{5 - \cos^2\theta - 4\sin\theta}$ का मान ज्ञात करो?

हलः— माना $I = \int \frac{(2\sin\theta - 2)\cos\theta \; d\theta}{5 - \cos^2\theta - 4\sin\theta}$

$I = \int \frac{(2\sin\theta - 2)\cos\theta \; d\theta}{5 - 1 + \sin^2\theta - 4\sin\theta}$

माना $\sin\theta = t$

$\Rightarrow \cos\theta \; d\theta = dt$

$I = \int \frac{(3t-2)}{t^2 - 4t + 4}$

$I = \int \frac{(3t-2)}{(t-2)^2} dt$

आंशिक भिन्न में नियोजित करने पर

$= \frac{3t-2}{(t-2)^2} = \frac{A}{(t-2)} + \frac{B}{(t-2)^2}$

$= \boxed{(3t-2) = A(t-2) + B}$

$t = 0$ पर $-2 = -2A + B$

$t = 2$ पर $4 = B$

अत: $A = 3$

अत : $I = 3\int \frac{dt}{(t-2)} + 4\int \frac{dt}{(t-2)^2}$

$I = 3 \log l(t-2) \; \frac{-4}{(t-2)} + c$

$$\boxed{I = 3\log(\sin\theta - 2) - \frac{4}{(\sin\theta - 2)} + C}$$

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

1. $\int x^2 \log x \; dx$ का मान होगा?
2. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\phi} \cos^5\phi \; d\phi$ का मान होगा?
3. $\int_0^2 x\sqrt{2-x} dx$ का मान होगा?
4. $\int \cos^3 x \; e^{\log \sin x} dx$ का मान होगा?
5. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx$ का मान होगा?
6. $\int_0^{\pi} e^x \left[\frac{1-\sin x}{1-\cos x}\right] dx$ का मान होगा?
7. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cos x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$ का मान होगा?
8. $\int e^x \left(\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}\right) dx$ का मान होगा?

अध्याय – 8
क्षेत्रकलन

अंकभार (1 + 1 + 2 = 4)

बहुविकल्पीय प्रश्न

1. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल है?

(1) 6π (2) 36π
(3) 9π (4) 3π

2. अन्तराल $[a,b]$ में दो वक्र $y=f(x)$ तथा $y=g(x)$ है तथा $f(x)\le g(x)$ तथा $x=a, x=b$ के मध्य इन वक्रो से धिरा क्षेत्रफल है?

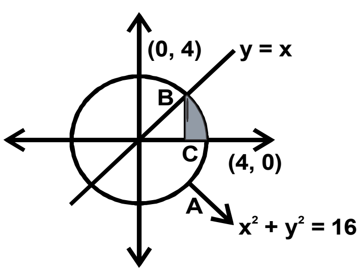
(1) $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ (2) $\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$

(3) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx$ (4) $\int_a^b [f(x)\ g(x)]dx$

3. $x=0$ से $x=\pi$ तक वक्र $y=\sin x$ के बीच क्षेत्रफल है?

(1) 1 (2) 2
(3) 3 (4) 4

4.

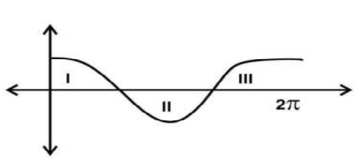


इस चित्र में छांयाकित भाग का क्षेत्रफल है?

(1) $\int_2^4 \sqrt{16-x^2}dx$ (2) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$

(3) $\int_{2\sqrt{2}}^4 \sqrt{16-x^2}dx$ (4) $\int_{\sqrt{2}}^4 \sqrt{16-x^2}dx$

5.



निम्न में से किस भाग का क्षेत्रफल आंकिक रूप से ऋणात्मक आयेगा।

(1) I (2) II
(3) III (4) None

6. रेखा $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ तथा निर्देशी अक्षों के बीच का क्षेत्रफल है?

(1) 6 (2) 3

(3) 12 (4) $\frac{3}{2}$

Answer key

1-1, 2-2, 3-2, 4-3, 5-2, 6-2

रिक्त स्थान की पूर्ति करें–

1. वक्र $y=x^3, x-$अक्ष एंव कोटियो $x=-2, x=0$ तक क्षेत्रफल .... है।

2. वक्र $y=x^2$ तथा रेखा $y=4$ के बीच का क्षेत्रफल है।

3. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=2$ का $x-$अक्ष के ऊपर का क्षेत्रफल............. है।

उत्तरमाला:–

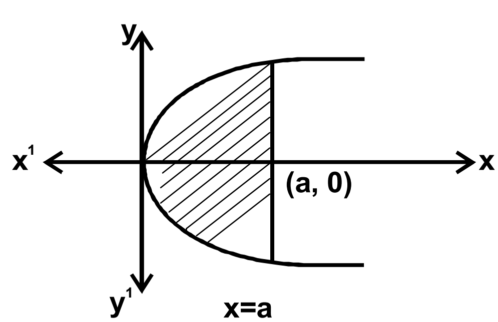
(1) 4 वर्ग इकाई

(2) $\frac{32}{3}$ वर्ग इकाई

(3) $2\sqrt{6}\pi$ वर्ग इकाई

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न

1. परवलय $y^2=4ax$ एवं इसके नाभिलम्ब के बीच का क्षेत्रफल है?



हल:–

परवलय की नाभि (a, 0) होती है।

अभिष्ठ क्षेत्रफल $= 2\times\int_0^a ydx$

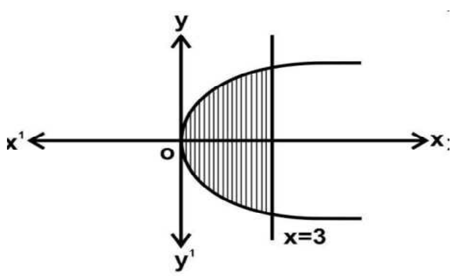
$= 2\times\int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x}dx$

$= 4\sqrt{a}\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$

$= \frac{8\sqrt{a}}{3}\left[a\sqrt{a}-0\right] = \frac{8a^2}{3}$ वर्ग इकाई

4. वक्र $y^2 = 4x$ एंव रेखा $x = 3$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करो?

हलः–



अभिष्ठ क्षेत्रफल $= 2x\int_0^3 ydx$

{∵ परवलय $y^2 = 4x$, y – अक्ष के सापेक्ष सममित है।}

$= 2x\int_0^3 2\sqrt{x}dx$

$= 4\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$

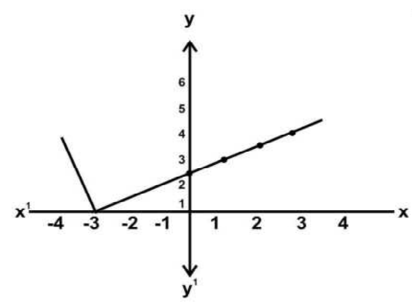
$= \frac{8}{3}\times[3\sqrt{3}-0]$

$= 8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई

3. $y = |x+3|$ का ग्राफ खीचीएः–

हलः– $y = |x+3|$

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	-4
y	3	4	5	6	2	1	0	1



अध्याय – 9
अवकल समीकरण

अंकभार (1 + 1 + 1 + 3 = 6)

1. अवकल समीकरण $\frac{2x^2d^2y}{dx^2}-\frac{3dy}{dx}+y=0$ की कोटि हैं

(1) 2 (2) 1

(3) 0 (4) परिभाषित नहीं है।

2. $\frac{d^2y}{dx^2}+5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-6y=\log x$ की घात है –

(1) 1 (2) 2

(3) अपरिभाषित (4) 0

3. किसी अवकल समीकरण की घात व कोटि हमेशा होती है।

(1) धनात्मक, पूर्णाक

(2) ऋणात्मक पूर्णाक

(3) धनात्मक व ऋणात्मक पूर्णांक

(4) कोई नहीं

4. यदि (दिये गये अवकल समीकरण में) p और q डिग्री और घात हो, तो 2p - 3q का मान होगा।

(1) 7 (2) -7

(3) 3 (4) -3

5. $\cos\frac{dy}{dx}=a$ अवकल समीकरण का हल है जब $y=1$ व $x=0$

(1) $\cos\left(\frac{y-2}{x}\right)$ (2) $\cos\left(\frac{y-1}{x}\right)$

(3) $\sin\left(\frac{y-1}{x}\right)$ (4) कोई नहीं

6. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=y\tan x,\ y=1$ का हल है जब $x=0$ हो।

(1) y = sec x (2) y = tan x

(3) y = -sec x (4) y = sec x + tan x

7. चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है–

(1) 0 (2) 2

(3) 3 (4) 4

8. निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से किस समीकरण का व्यापक हल $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$ है–

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}+1=0$ (4) $\frac{d^2y}{dx^2}-1=0$

-: Answer :-

1-, 2-, 3-, 4-4, 5-2, 6-, 7-4, 8-2

9. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$ निम्नलिखित समीकरण की घात तथा कोटि ज्ञात कीजिए।

Ans. $\frac{d^2y}{dx^2}$ अवकलन की कोटि 2 तथा इस समीकरण का बांया पक्ष अवकलनों में बहुपद नहीं है, इसलिए इसकी घात परिभाषित नहीं है।

10. सत्यापित कीजिए कि फलन $y=a\cos x+b\sin x$ जिसमें $a,b\in R$, अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ का हल है।

Ans. दिया हुआ फलन है $y=a\cos x+b\sin x$ 1

समीकरण 1 के दोनों पक्षों को x, के सापेक्ष उत्तरोतर अवकलन करने पर हम देखते है–

$$\frac{dy}{dx}=-a\sin x+b\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a\cos x-b\sin x$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ एवं y का मान दिए हुए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त करते है।

बांया पक्ष $=(-a\cos x-b\sin x)+(a\cos x+b\sin x)=0$

दायां पक्ष

11. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{2-y},(y\neq 2)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया गया है कि $\frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{2-y},(y\neq 2)$ 1

समीकरण 1 के चरों को पृथक करने पर हम प्राप्त करते है –

$(2-y)dy=(x+1)dx$ 2

समीकरण 2 के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$\int(2-y)dy=\int(x+1)dx$

अथवा $2y-\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+x+c_1$

अथवा

$x^2+y^2+2x-4y+2c_1=0$

$x^2+y^2+2x-4y+c=0$

$c=2c_1$ समीकरण का व्यापक हल है।

12. $y\log y dx-xdy=0$ अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया है $y\log y dx-xdy=0$

$y\log y dx=xdy$

$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y\log y}$

$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y\log y}$

यहां $\log y=t$ रखने पर–

$\frac{1}{y}dy=dt\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1}{t}.dt$

$\Rightarrow\log|x|=\log|t|+c_1$

$\log|x|=\log|\log y|+c_1$

$\log|x|-\log|\log y|=c_1$

$\log\left|\frac{x}{\log y}\right|=c_1$

$\frac{x}{\log y}=e^{c_1}=A$ (माना)

$x=A\log y$

$\log y=\frac{1}{A}x=cx$

$y=e^{cx}$ (अभिष्ट हल)

13. $x^5\frac{dy}{dx}=-y^5$ अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात करो।

Sol. $x^5dy=-y^5dx$

$\frac{dy}{y^5}=-\frac{dx}{x^5}$ (x^5 व y^5 का पक्षान्तरण करने पर)

$\int\frac{1}{y^5}dy=-\int\frac{1}{x^5}dx$

$\Rightarrow\int y^{-5}dy=-\int x^{-5}dx$

$\Rightarrow\frac{y^{-5+1}}{-5+1}=-\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+C^1$

$-\frac{1}{4y^4}=\frac{1}{4x^4}+C^1$

$-\frac{1}{4y^4}-\frac{1}{4x^4}=C^1$

$\frac{1}{y^4}+\frac{1}{x^4}=-4C^1$ (-4 से गुणा करने पर)

अतः $\boxed{y^{-4}+x^{-4}=C}$ $(\because -4C^1=C)$

14. $x\frac{dy}{dx}-y+x\sin\frac{y}{x}=0$ समघातीय अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

Ans. प्रश्नानुसार $x\frac{dy}{dx}-y+x\sin\frac{y}{x}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x\sin\frac{y}{x}}{x}=f(x,y)$

$\therefore f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda y-\lambda x\sin\frac{\lambda y}{\lambda x}}{\lambda x}=\frac{\lambda\left(y-x\sin\frac{y}{x}\right)}{\lambda x}$

$=\lambda^o f(x,y)$

$\therefore f(x,y)$ समघातीय फलन है जिकी घात शून्य है।

$y=vx$ रखने पर,

$\therefore \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

या $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx - x\sin\frac{vx}{x}}{x} = v - \sin v$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर –

$\int \frac{2-\log v}{-v+v\log v}dv = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{1-\log v+1}{v(-1+\log v)}dv = \log|x| + \log C$

$-\log|v| + \log|\log v - 1| = \log|x| + \log C$

$\log|\log v - 1| = \log v + \log x + \log x = \log|Cvx|$

$\log v - 1 = Cvx$

$\log v = 1 + Cvx$

$\log\frac{y}{x} = 1 + C.\frac{y}{x}.x$

$= \frac{y}{x}, \log\frac{y}{x} = 1 + Cy$

अभिष्ट हल $Cy = \log\frac{y}{x} - 1$

15. $2xy + y^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} = 0, y = 2$ यदि $x = 1$ समघातीय अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

Ans. अवकल समीकरण $2xy + y^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} = 0$

$2x^2\frac{dy}{dx} = 2xy + y^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy + y^2}{2x^2}$ 1

अब $y = vx$ रखने पर –

$\frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2x.vx + v^2x^2}{2x^2}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{2} \Rightarrow v^{-2}dv = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर–

$\int v^{-2}dv = \frac{1}{2}.\int\frac{dx}{x}$

$\frac{v^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{2}\log|x| + C$

$\frac{-1}{v} = \frac{1}{2}\log|x| + C$

पुनः $v = \frac{y}{x}$ रखने पर –

$-\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\log|x| + C$ 2

अब $x = 1, y = 2$ रखने पर

$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log 1 + C$

$C = -\frac{1}{2}$

C का मान समीकरण 2 में रखने पर

$-\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\log|x| - \frac{1}{2}$

$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}[1 - \log|x|]$

अतः अभिष्ट हल $y = \frac{2x}{1-\log|x|}$

16. अवकल समीकरण $(\tan^{-1}y - x)dy = (1 + y^2)dx$ का हल ज्ञात कीजिए।

Ans. दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप से लिखा जा सकता है।

$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$ 1

समीकरण 1, $\frac{dx}{dy} + p_1x = Q_1$, के रूप का रैखिक अवकल समीकरण है। यहां $p_1 = \frac{1}{1+y^2}$ एवं $Q_1 = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$

$I.F. = e^{\int\frac{1}{1+y^2}dy} = e^{\tan^{-1}y}$

इसलिए अवकल समीकरण का हल है–

$$\Rightarrow xe^{\tan^{-1}y} = \int\left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right)e^{\tan^{-1}y}dy + C \quad ....2$$

$$I = \int\left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right)e^{\tan^{-1}y}dy$$

$\Rightarrow \tan^{-1}y = t$ रखने पर हम पाते हैं कि $\left(\frac{1}{1+y^2}\right)dy = dt$

अतः $I = \int te^t dt, I = te^t - \int 1.e^t e^t, I = te^t = e^t(t-1)$

$I = e^{\tan^{-1}y}(\tan^{-1}y - 1)$

समीकरण 2 में I का मान प्रतिस्थापित करने पर–

$x.e^{\tan^{-1}y} = e^{\tan^{-1}y}(\tan^{-1}y-1)+C$ पाते है।

$x = (\tan^{-1}y-1)+Ce^{\tan^{-1}}y$ (अभिष्ट हल)

17. $\frac{dy}{dx} - 3y\cot x = \sin 2x$; $y=2$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$ तो अवकल समीकरण का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

Ans. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - 3y\cot x = \sin 2x$

यह $\frac{dy}{dx} + py = Q$ के रूप का अवकल समीकरण है–

अतः $p = -3\cot x$ $\quad Q = \sin 2x$

$$\therefore \text{I.F.} = e^{\int p.dx} = e^{\int -3\cot x dx} = e^{-3\log\sin x}$$

$$= e^{\log(\sin x)^{-3}} = \frac{1}{\sin^3 x} = \text{cosec}^3 x$$

$I.F. = \text{cosec}^3 x$

अवकल समीकरण का हल–

$$y.I.F. = \int Q.I.F.dx + C$$

$$\Rightarrow y.\text{cosec}^3 x = \int \sin 2x.\text{cosec}^3 x dx + C$$

$$= \int 2\sin x.\cos x.\text{cosec}^3.dx + C$$

$$= 2\int \cot x.\text{cosec}\, x\, dx + C$$

$$\Rightarrow y.\text{cosec}^3 x = -2\,\text{cosec}\, x + C$$

$$y = -2\sin^2 x + C\sin x$$

$x = \frac{\pi}{2}$ तथा $y = 2$ रखने पर $C = 4$

अतः $y = -2\sin^2 x + 4\sin^3 x$

18. बिन्दु (0,0) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $y' = e^T \sin x$ है।

Ans. $y' = e^T \sin x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^T \sin x$$

$$\Rightarrow dy = e^T \sin x dx$$

$$\int dy = \int e^T \sin x dx$$

$$y = \int e^T \sin x dx + C$$

माना कि $I = \int e^x \sin x dx$

e^x को पहला फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$$I = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)dx$$

$$= -e^x\cos x + \int e^x \cos x dx$$

$\int e^x \cos x dx$ का खण्डशः समाकलन करने पर–

$$I = e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$= -e^x\cos x + e^x \sin x - I$$

$$\therefore 2I = -e^x cox + e^x \sin x$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(-\cos x + \sin x)$$

I का मान समीकरण 1 में रखने पर

$$y = \frac{1}{2}e^x(-\cos x + \sin x) + C$$

$x = 0, y = 0$ रखने पर

$$o = -\frac{1}{2}\times 1 + C \qquad \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

इसलिए समीकरण का अभिष्ट हल होगा–

$$y = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}$$

19. किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि r% वार्षिक की दर से होती हैं यदि 100 रुपये 10 वर्षों में दुगुने हो जाते हैं तो r का मान ज्ञात कीजिए। $(\log_e 2 = 0.6931)$

Ans. माना किसी समय t पर मूलधन p है एवं दर r है।

अतः $\frac{dP}{dt}=\frac{\text{Pr}}{100}$

$\therefore \frac{dP}{dt}=\frac{\text{Pr}}{100}\Rightarrow\frac{dP}{P}=\frac{rdt}{100}$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$\int\frac{dP}{P}=\int\frac{r}{100}dt$

$\log P=\frac{r}{100}t+\log C$

$\therefore \log P-\log C=\frac{r}{100}t$

$\Rightarrow \log\frac{P}{C}=\frac{r}{100}t\Rightarrow\frac{P}{C}=e^{\frac{r}{100}t}$

$\Rightarrow P=Ce^{\frac{t}{100}t}$ 1

जब $t=0, P=100$ तो समीकरण से

$100=Ce^{o}\Rightarrow C=100$

समीरण 1 में C का मान रखने पर

$P=100e^{\frac{r}{100}t}$

तथा जब $t=10, P=200$ तो समीकरण 1 से

$200=100e^{\frac{r}{100}t\times10}$

$2=e^{\frac{r}{10}}$

$\therefore \frac{r}{10}=\log 2$

$\Rightarrow r=-10\log 2=10\times 0.6931$

$\therefore r=6.931\%$

20. (x - y) dy - (x + y) dx = 0 समघातीय अवकल समीकरण का हल ज्ञात करो।

Sol. (x - y) dy = (x + y) dx

$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$

$\because$ y = vx रखने पर

$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x+vx}{x-vn}$

$\Rightarrow \quad v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x(1+v)}{x(1-v)}$

$\Rightarrow \quad v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v}{1-v}$

$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v}{1-v}-\frac{v}{1}=\frac{1+v-v+v^2}{1-v}=\frac{1+v^2}{1-v}$

$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{1-v} \quad \Rightarrow\frac{1-v}{1+v^2}dv=\frac{1}{x}dx$

समाकलन करने पर

$\int\frac{1-v}{1+v^2}dv=\int\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\int\frac{2v}{v^2+1}dv+\int\frac{dv}{1+v^2}=\int\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\log(v^2+1)+\tan^{-1}v=\log|x|+c \qquad v=\frac{y}{x}$

रखने पर

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\log\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)+\tan^{-1}\frac{y}{x}=\log|x|+c$

$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\log\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{1}\right)-\log|x|=c$

अतः अभीष्ट हल $\tan^{-1}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\log\frac{x^2+y^2}{x^2}-\log|x|=c$

$\tan^{-1}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\log\frac{x^2+y^2}{x^2}\cdot x^2=c$

$\tan^{-1}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)=c$

$$\boxed{\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+c}$$

21. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=\frac{1}{1+x^2}$; $y=0$ व $x=1$ समघातीय अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

Ans. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=\frac{1}{1+x^2}$

$\frac{dy}{dx}+\frac{2xy}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^2}$; $(1+x^2)$ से भाग करने पर

$\frac{dy}{dx} = pq = Q$ से तुलना करने पर

$P = \frac{2x}{1+x^2}, \quad Q = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

$\therefore \int Pdx = \int \frac{2x}{1+x^2} dx$ $\quad \because 1+x^2 = u$ रखने पर

$2ndx = du$

$\Rightarrow \int Pdx = \int \frac{du}{u} = lyu = \log(1+x^2)$

$\therefore$ I. F. $= e^{\int Pdx} = e^{\log(1+x^2)} \Rightarrow 1+x^2$

$\therefore y \times 1 . f = \int Q \times I.F. \ dx + C$ से

$y \cdot (1+x^2) = \int \frac{1}{(1+x^2)^2}(1+x^2)dx + C$

$y\,(1 + x^2) = \int \frac{dx}{1+x^2} + C$

$y\,(1 + x^2) = \tan^{-1} x + C$

$x = 1$ तथा $y = 0$ रखने पर

$0\,(1 + 1^2) = \tan^{-1}1 + C$

$0 = \tan^{-1}1 + C$

$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\pi}{u} + C$

$\therefore C = -\frac{\pi}{4}$

अतः अभीष्ट हल $=$ $\boxed{y(1+x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}}$

अध्याय – 10
सदिश बीजगणित

अंकभार (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 7)

1. यदि A(1, 1, 2), B(1, 2, 5) और C (1, 5, 5) ΔPQR के शीर्ष हो, तो क्षेत्रफल होगा।

(1) $\frac{\sqrt{61}}{2}$ वर्ग इकाई (2) $\sqrt{61}$ वर्ग इकाई

(3) $61\sqrt{2}$ वर्ग इकाई (4) 2 वर्ग इकाई

2. यदि शून्येत्तर सदिश $\vec{a}$ का परिमाण 'a' है और λ एक शून्येतर अदिश है तो $\lambda\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है यदि

(1) $\lambda = 1$ (2) $\lambda = -1$

(3) $a = |\lambda|$ (4) $a = \frac{1}{|\lambda|}$

3. यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ हो, तो $\vec{a} \cdot \vec{b}$ का मान होगा –

(1) 9 (2) 10 (3) 20 (4) $2\sqrt{5}$

4. सदि $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}$ का सदिश $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$ पर प्रक्षेप होगा –

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\sqrt{2}$ (4) 0

5. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ इस प्रकार है कि $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ लंब है $\vec{c}$ पर तो λ का मान होगा?

(1) 8 (2) 10

(3) 6 (4) 4

6. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ हो तो $\vec{a} + \vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश होगा –

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{k})$

(3) $\frac{1}{2}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (4) इनमें से कोई नहीं

7. यदि A(1, 1,2), B (2, 3, 5) तथा C(1, 5, 5) ΔABC के शीर्ष हो तो क्षेत्रफल होगा–

(1) $\sqrt{61}$ वर्ग इकाई (2) $\frac{1}{2}\sqrt{61}$ वर्ग इकाई

(3) $61\sqrt{2}$ वर्ग इकाई (4) इनमें से कोई नही

8. सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ पर प्रक्षेप होगा –

(1) 19 (2) $19\sqrt{9}$

(3) $\frac{19}{\sqrt{9}}$ (4) $\frac{19}{9}$

9. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच कोण θ हो, तो $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ कब होगा –

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(3) $0 < \theta < \pi$ (4) $0 \leq \theta \leq \pi$

10. सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ की दिशा में इकाई सदिश होगा –

(1) $\frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$ (2) $\frac{1}{\sqrt{4}}(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

(3) $\frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ (4) $\frac{1}{\sqrt{4}}(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

-: Answer :-

1-1, 2-4, 3-2, 4-4, 5-1, 6-2, 7-2, 8-4, 9-2, 10-3

11. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

(i) दिक्कोसाइन के समानुपाती संख्याएें lr, mr, br सदिश $\vec{r}$ के .... कहलाते है।

Ans. दिक्अनुपात

(ii) सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ के दिक्कोसाइन .... होंगे।

Ans. $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}$

(iii) समान्तर चतुर्भुज जिसकी आसन्न भुजाये $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ है तो सदिश क्षेत्रफल................ होगा।

Ans. $\vec{a} \times \vec{b}$

(iv) सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के दिक्कोसाइन........................ होंगे।

Ans. $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$

(v) त्रिभुज की तीनों भुजाओ को क्रम में लेने पर उनका सदिश योग .... है।

Ans. $\vec{0}$

(vi) दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ समान सदिश कहलाते है यदि उनके ... . है।

Ans. परिणाम एवं दिशा समान

(vii) यदि $\theta=\frac{\pi}{2}$ हो, तो $\overline{AB}$ पर प्रक्षेप सदिश .... होगा।

Ans. शून्य सदिश।

12. सदिश $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ के दिक् अनुपात लीखिए और इसकी सहायता से दिक्–कोसाइन ज्ञात कीजिए।

Ans. सदिश $\vec{r}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ तब a,b,c सदिश $\vec{r}$ के दिक्–अनुपात होते है अतः $a=1,b=1,c=-2$

यदि l,m,n दिए हुए सदिश के दिक्–कोसाइन है तो

$$l=\frac{a}{|\vec{r}|}=\frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \left(\because |\vec{r}|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}\right)$$

$$m=\frac{b}{|\vec{r}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$n=\frac{c}{|\vec{r}|}=\frac{-2}{\sqrt{6}}$$

अतः दिक्–कोसाइन $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$ है।

13. दो सदिशों $\vec{a}$ और के $\vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए। यदि इनके परिमाण समान है और इनके बीच का कोण 60^o है तथा इनका अदिश गुणनफल $\frac{1}{2}$ है।

Ans. प्रश्नानुसार,

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$

तथा $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}$

$\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण $\theta=60^o$

माना $|\vec{a}|=|\vec{b}|=k$

अब $\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\frac{1}{2}}{k.k}=\frac{1}{2k^2}$

$$\cos 60^o=\frac{1}{2k^2}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2k^2}$$

$$k^2=1$$

$$k=\pm 1$$

परन्तु $k=|\vec{a}|=|\vec{b}|$

$\therefore k=1=|\vec{a}|=|\vec{b}|$

अतः $|\vec{a}|=1$

तथा $|\vec{b}|=1$

14. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी सलंग्न भुजाएं $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ और $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ द्वारा दी गई है।

Ans. किसी समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएं $\vec{a}$ और $\vec{b}$ है तो उसका क्षेत्रफल $|\vec{a}\times\vec{b}|$ द्वारा प्राप्त होता है।

तो $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\sqrt{25+1+16}=\sqrt{42}$$

15. यदि $\vec{a}=\hat{i}-7\hat{j}+7\hat{k}$ और $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ तो $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

Ans. $\vec{a}=\hat{i}-7\hat{j}+7\hat{k}$

$\vec{b}=\hat{i}-7\hat{j}+7\hat{k}$

तो $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -7 & 1\\ 3 & -2 & 2\end{vmatrix}$

$$=(-14+14)\hat{i}-(2-21)\hat{j}+(-2+21)\hat{k}$$

$$=0\hat{i}+19\hat{j}+19\hat{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=|19\hat{i}+19\hat{k}|$$

$$=\sqrt{(19)^2+(19)^2}$$

$$=\sqrt{361+361}$$

$$=\sqrt{722}$$

$$=19\sqrt{2}$$

16. सदिशों $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ और $\vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ के परिणामी के समान्तर एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 5 इकाई है।

Ans. माना $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का परिणामी $\vec{c}$ है। तब $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

$=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}+(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$

$=3\hat{i}+\hat{j}$

$\therefore \vec{c}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $=\frac{1}{|\vec{c}|}(\vec{c})=\hat{c}$

$\hat{c}=\frac{3\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{10}}\hat{j}$

अतः $\vec{c}$ के अनुदशि वह सदिश जिसका परिमाण 5 इकाई हो

$=5\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{10}}\hat{j}\right)$

$=\frac{15}{\sqrt{10}}\hat{i}+\frac{5}{\sqrt{10}}\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\hat{j}$

$=\sqrt{10}\frac{3}{2}\hat{i}+\frac{5}{10}\sqrt{10}\hat{j}$

$=\sqrt{10}\frac{3}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\sqrt{10}\hat{j}$

17. दर्शाइये कि ox, oy, oz अक्षों के साथ बराबर झुके हुये सदिश की दिक्–कोसाइन कोज्याएं $\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

Ans. माना एक सदिश $\overrightarrow{OP}, ox, oy$ तथा oz के साथ बराबर कोण α बनाता है तो

$\overrightarrow{OP}$ की दिक् कोज्याऐं $=\cos\alpha,\cos\alpha,\cos\alpha$

$=\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\left[\because l^2+m^2+n^2=1\right]$

$=\cos^2\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$

अतः $\overrightarrow{OP}$ की दिक्–कोसाइन $\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

18. बिन्दुओं A(1, 2, 2) और B(2, 3, 1) को मिलाने वाला सदिश $\overrightarrow{AB}$ क्या होगा।

Ans. A(1, 2, 2) और B(2, 3, 1)

$\overrightarrow{AB}=(2-1)\hat{i}+(3-2)\hat{j}+(1-2)\hat{k}$

$\left[\because \overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k}\right]$

$\overrightarrow{AB}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

19. यदि एक त्रिभुज की दो भुजायें सदिश $\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ से निरूपित हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Ans. माना $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ $\quad \vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=(2+4)\hat{i}-(1-6)\hat{j}+(-2-6)\hat{k}$$

$=6\hat{i}+5\hat{j}-8\hat{k}$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{36+25+64}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{125}$

$=\frac{1}{2}\times5\sqrt{5}$ वर्ग इकाई

20. a और b के मान ज्ञात कीजिए ताकि सदिश $5\hat{i}+7\hat{j}$ और $a\hat{i}+b\hat{j}$ समान हो –

Ans. $5\hat{i}+7\hat{j}$ और $a\hat{i}+b\hat{j}$ समान है

अतः a = 5 व b \ 7

21. यदि $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है और $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a})=8$ तो $|\vec{x}|$ ज्ञात कीजिए –

Ans. $\because \vec{a}$ एक मात्रक सदिश है अतः $|\vec{a}|=1$

$(\vec{x}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a})=8$

$\vec{x}\cdot\vec{x}+\vec{x}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{x}-\vec{a}\cdot\vec{a}=8$

$|\vec{x}|^2-1=8$

$|\vec{x}|^2=8+1$

$|\vec{x}|^2=9$

$|\vec{x}|=3$

22. दर्शाइये की बिन्दु $A(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}),\ B(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}), C(3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k})$ समकोण त्रिभुज के शीर्ष है –

Ans. $A(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}),\ B(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}), C(3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k})$

तब $\overrightarrow{AB}=(1-2)\hat{i}+(-3+1)\hat{j}+(-5-1)\hat{k}=-\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}$

$\overrightarrow{BC}=(3-1)\hat{i}+(-4+3)\hat{j}+(-4+5)\hat{k}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

$\overrightarrow{CA}=(2-3)\hat{i}+(-1+4)\hat{j}+(1+4)\hat{k}=-\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$

तब $|\overrightarrow{AB}|^2=41,\ |\overrightarrow{BC}|^2=6,\ |\overrightarrow{CA}|^2=35$

अतः $|\overline{AB}|^2 = |\overline{BC}|^2 + |\overline{CA}|^2$

$41 = 6 + 35$

अतः A, B, C समकोण त्रिभुज के शीर्ष है।

23. सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ की दिशा में ऐसा सदिश ज्ञात करों जिसका परिणाम 7 इकाई हो?

Sol. सदिश $\vec{a}$ की दिशा में इकाई सदिश

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\hat{i} - 2\hat{j}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\hat{i} - 2\hat{j}}{\sqrt{5}}$$

ऐसा सदिश जिसका परिणाम 7 हो,और $\vec{a}$ की दिशा में हो –

$$7\hat{a} = 7\left(\frac{\hat{i}}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right)$$

$$= \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

24. दो अशुन्य सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हो, तो दर्शाइये सदिश $|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}$ सदिश $|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}$ के लम्बवत् है –

Ans. $\left(|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a}\right)\cdot\left(|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}\right)$

$= |\vec{a}|^2 (\vec{b}\cdot\vec{b}) - |\vec{a}||\vec{b}|(\vec{b}\cdot\vec{a}) + |\vec{b}||\vec{a}|(\vec{a}\cdot\vec{b}) - |\vec{b}|^2 (\vec{a}\cdot\vec{a})$

$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}||\vec{b}|(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}||\vec{a}|(\vec{a}\cdot\vec{b}) - |\vec{b}|^2|\vec{a}|^2$

$\{\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2, \ \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}\}$

$= 0$

अतः दोनों सदिश एक के लम्बवत् है।

25. सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ के लम्बवत् इकाई सदिश ज्ञात करों जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \ \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

Ans. $\vec{a} + \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{a} - \vec{b} = -\hat{j} - 2\hat{k}$

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ और $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$ के लम्बवत् सदिश

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\times\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\times\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

माना $C = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$,

$|\vec{C}| = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

तब इकाई सदिश $\hat{C} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$

26. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो यदि त्रिभुज के शीर्ष A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) और C (2, 3, 1) हो?

Ans. सदिश $\overline{AB} = \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\overline{AC} = \hat{i} + 2\hat{j}$

तब त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{16 + 4 + 1} = \sqrt{21}$

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\sqrt{21}$

27. यदि $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k})\times(\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = \vec{O}$ हो, तब λ और μ का मान ज्ञात करें –

Ans. $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k})\times(\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = \vec{O}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 6 & 27 \\ 1 & \lambda & \mu \end{vmatrix} = \vec{O}$$

$\hat{i}(2\mu - 27\lambda) - \hat{j}(2\mu - 27) + \hat{k}(2\lambda - 6) = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

तुलना करने पर

$2\mu - 27 = 0$, $\mu = \frac{27}{2}$ | $2\lambda - 6 = 0$, $2\lambda = 6$, $\lambda = 3$

अध्याय – 11
त्रि–विमीय ज्यामिति

अंकभार (1 + 1 + 3 + 4 = 9)

1. यदि दो रेखाओं के दिकअनुपात a_1,b_1,c_1 तथा a_2,b_2,c_2 है तो वे परस्पर लम्बवत होगी, यदि–

(1) $a_1b_2+a_2b_1+c_1c_2=0$ (2) $a_1^2+b_1^2+c_1^2=1$

(3) $a_2^2+b_2^2+c_2^2=1$ (4) $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

2. यदि एक रेखा x, y और z अक्ष के साथ क्रमशः $90^o, 135^o, 45^o$ कोण बनाती है तो इसकी दिक्कोसाइन होगी–

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0$ (2) $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

(3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$ (4) $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

3. x-अक्ष के समान्तर तथा मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण होगा–

(1) $\vec{r}=\lambda\hat{j}$ (2) $\vec{r}=\lambda(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

(3) $\vec{r}=\lambda\hat{i}$ (4) $\vec{r}=\lambda(\hat{j}+\hat{k})$

4. x-अक्ष की दिक्–कोसाइन होंगे –

(1) 1, 0, 0 (2) 0, 0, 1

(3) 0, 1, 1 (4) 0, 0, 0

5. निम्न में से कौनसा समुह एक रेखा की दिक्कोज्याएँ नहीं है?

(1) (0, -1, 0) (2) (-1, 0, 0)

(3) (1, 1, 1) (4) 0, 0, -1

6. यदि दो रेखाएँ $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2k}=\frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3k}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-5}$ परस्पर लम्बवत् है तो k का मान होगा–

(1) $k=\frac{10}{7}$ (2) $k=-\frac{7}{10}$

(3) $k=-\frac{10}{7}$ (4) $k=-\frac{5}{7}$

7. बिन्दु (x, y, z) की z-अक्ष से लम्बवत् दूरी है –

(1) $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (2) $\sqrt{x^2+y^2}$

(3) 1 (4) Y

8. दो बिन्दुओं (-2, 4, -5) और (1, 2, 3) को मिलाने वाली रेखा की दिक्–कोसाइन है –

(1) $\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{2}{\sqrt{70}}, \frac{8}{\sqrt{70}}$ (2) $\frac{3}{\sqrt{77}}, -\frac{2}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$

(3) $\frac{2}{\sqrt{77}}, -\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}$ (4) $\frac{8}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}$

9. सदिश $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ के दिक् कोसाइन है –

(1) $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{3}{5}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{9}}, \frac{1}{\sqrt{9}}, -\frac{3}{\sqrt{9}}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}$

10. बिन्दु (1, 2, 3) से जाने वाली तथा रेखा $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$ के समान्तर रेखा का कार्तीय समीकरण होगा –

(1) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{6}$ (2) $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z+3}{6}$

(3) $\frac{x+3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+8}{3}$ (4) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-6}{5}=\frac{z+5}{6}$

-: Answer :-

1-4, 2-2, 3-3, 4-1, 5-3, 6-3, 7-2, 8-2, 9-3, 10-1

11. दर्शाइए कि बन्दु (2, 3, 4), (-1, -2, 1), (5, 8, 7) संरेख है–

Ans. माना दिये गये बिन्दु A(2, 3, 4), B(-1, -2,1) तथा C(5, 8, 7) है:

$\therefore AB=\sqrt{(-1-2)^2+(-2-3)^2+(1-4)^2}$

$=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{3+25+9}=\sqrt{43}$

$BC=\sqrt{(5+1)^2+(8+2)+(7-1)^2}$

$=\sqrt{(6)^2+(10)^2+(6)^2}$

$=\sqrt{36+100+36}=2\sqrt{43}$

$AC=\sqrt{(2-5)^2+(3-3)^2+(4-7)^2}$

$=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(-3)^2}$

$= \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$

$\therefore AC + AB = \sqrt{43} + \sqrt{43} = 2\sqrt{43} = BC$

अतः बिन्दु A, B तथा C संरेख है।

12. दिए गए रेखा युग्म

$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)$

और $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu\left(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}\right)$

के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

Ans. मान लीजिए

माना रेखाओं के बीच कोण θ हो तो

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1.\vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$$

$$\cos\theta = \left|\frac{\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\right).\left(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}\right)}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$\cos\theta = \left|\frac{3+4+12}{3\times7}\right| = \frac{19}{21}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$$

13. बिन्दु $(1,2,3)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ के समान्तर है।

Ans. स्थिति बिन्दु $A(\vec{a})$ से गुजरने वाली रेखा AP तथा सदिश $\vec{b}$ के समान्तर रेखा का समीकरण

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$

यहां पर $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

और $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

अभीष्ट रेखा AP का समीकरण

$\vec{r} = \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right) + \lambda\left(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}\right)$

14. निम्न रेखा युग्म के बीच कोण ज्ञात कीजिए।

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \text{ और } \frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{8}$$

Ans. रेखा $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ के दिक् अनुपात 2, 2, 1 है तथा रेखा $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$ के दिक् अनुपात 4, 1, 8 है।

$\therefore a_1 = 2, b_1 = 2, c_1 = 1$

$a_2 = 3, b_2 = c_2 = 8$

यदि दो रेखाओं के मध्य कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$= \frac{2\times4 + 2\times1 + 1\times8}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{4^2 + 1^2 + 8^2}}$$

$$= \frac{8+2+8}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{16+1+64}} = \frac{18}{\sqrt{9}\sqrt{81}} = \frac{18}{3\times9} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

15. रेखा युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए–

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3} \text{ तथा } \frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$$

Ans. दी गई रेखाओं के दिक्अनुपात–

$a_1 = 2, b_1 = 5, c_1 = -3$

$a_2 = -1, b_2 = 8, c_2 = 4$

दोनों रेखाओं के बीच का कोण θ हो तो –

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{2\times(-1) + 5\times8 + (-3)\times4}{\sqrt{4+25+9}\sqrt{1+64+16}}\right|$$

$$= \left|\frac{-2+40-12}{\sqrt{38}\sqrt{81}}\right|$$

$$= \frac{26}{9\sqrt{38}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$$

16. बिन्दुओं (-1, 0, 2) और (3, 4, 6) से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए –

Sol. बिन्दु (A) (-1, 0, 2) का स्थिति सदिश – $\vec{a} = (-\hat{i} + 2\hat{k})$

बिन्दु (B) (3, 4, 6) का स्थिति सदिश – $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

अतः $\vec{b} - \vec{a} = (3-(-1)\hat{i}) + (4-0)\hat{j} + (6-2)\hat{k}$

$= 4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$

अतः रेखा का सदिश समीकरण $\vec{r} = -\hat{i}+2\hat{k}+\lambda(4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k})$

17. रेखायुग्म $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{5}$ व $\frac{x+1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{2}$ के मध्य कौन ज्ञात कीजिए –

Sol. $\because$ पहली रेखा के दिक्अनुपात = 3, 5, 4

दूसरी रेखा के दिक् अनुपात = 1, 1, 2

$$\text{अतः } \cos\theta = \left|\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$$

$$\cos\theta = \left|\frac{3\cdot1+5\cdot1+4\cdot2}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\ \sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right|$$

$$\cos\theta = \left|\frac{16}{\sqrt{6}}\right| = \frac{16}{5\sqrt{2}\ \sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

$$\cos\theta = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$$

18. उन रेखाओं के मध्य कोण ज्ञात कीजिए जिसके दिक् अनुपात a, b, c और (b - c), (c - a), (a - b) है।

Sol.
$$\cos\theta = \frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{ab-ac+bc-ab+ac-bc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}}$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = \cos^{-1}(0)$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

19. रेखाएँ, जिनके अदिश समीकरण निम्न है के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए –

$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$

और $\vec{r} = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$

Sol. $\vec{r}_0 = \vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ से तुलना करने पर

$\vec{a}_1 = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k},\quad \vec{b}_1 = (\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$

$\vec{a}_2 = 4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k},\quad \vec{b}_2 = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

रेखाओ के बीच न्यूनतम दूरी $d = \left|\frac{(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|}\right|$

अतः $\vec{a}_2-\vec{a}_2 = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})-(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$

$= (4-1)\hat{i}+(5-2)\hat{j}+(6-3)\hat{k}$

$= 3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}$

व $\vec{b}_1\times\vec{b}_2 = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$

$\vec{b}_1\times\vec{b}_2 = (-3-6)\hat{i}-(1-4)\hat{j}+(3+6)\hat{k}$

$= -9\hat{i}+3\hat{j}+9\hat{k}$

अतः $|\vec{b}_1\times\vec{b}_2| = \sqrt{(-9)^2+3^2+9^2} = \sqrt{81+9+81}$

$|\vec{b}_1\times\vec{b}_2| = \sqrt{171} = 3\sqrt{19}$

$$\therefore d = \left|\frac{(3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k})\cdot(-9\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k})}{3\sqrt{19}}\right|$$

$$d = \left|\frac{3(-9)+3\times3+3\times9}{3\sqrt{19}}\right|$$

$$d = \left|\frac{-27+9+27}{9\sqrt{19}}\right|$$

$$d = \frac{9}{3\sqrt{19}} = \frac{9}{\sqrt{19}}$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{19}}$$

20. एक रेखा के दिक् कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक्षो के साथ समान कोण बनाती है –

Ans. माना रेखा की दिक् कोसाइन l, m और n है जो अक्षों के साथ α कोण बनाती है इसलिए

$\ell = \cos\alpha,\ m = \cos\alpha,\ n = \cos\alpha$

$= l^2+m^2+n^2 = 1$

$\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$

$3\cos^2\alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = 1/3$

$\cos^2 \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

अतः दिक् कोसाइन $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

21. दर्शाइए कि बिन्दुओं (1, 2, 3), (3, 4, 5) से होकर जाने वाली रेखा बिन्दुओं (-1, 2, 4), (2, -1, 4) से जाने वाली रेखा पर लम्ब है –

Sol. यदि रेखा दो बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1) व (x_2, y_2, z_2) दो बिन्दुओं से गुजरती है तो दिक् अनुपात $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$

तब रेखा A (1, 2, 3), B(3, 4, 5) के दिक् अनुपात

$a_1 = 3 - 1 = 2, \quad b_1 = 4 - 2 = 2, \quad c_1 = 5 - 3 = 2$

तथा रेखा C (-1, 2, 4) D(2, -1, 4) से जाने वाली के दिक् अनुपात

$a_2 = 2 - (-1) = 3, \quad b_2 = -1 - 2 = -3, \quad c_2 = 4 - 4 = 0$

यदि दो रेखाएँ जिसके दिक् अनुपात a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 है परस्पर लम्बवत् है तब

$$a_1 . a_2 + b_1 . b_2 + c_1 . c_2 = 0$$

$$2 \times 3 + 2 \times (-3) + 2 \times 0 = 6 - 6 + 0 = 0$$

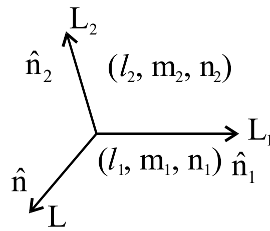
अतः दोनों रेखाएँ परस्पर लम्बवत् है।

22. यदि दो परस्पर लम्बवत् रेखाओं के दिक् कोसाइन क्रमशः l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 है तब दर्शाइए दोनों रेखाओं के लम्बवत् रेखा के दिक् कोसाइन $m_1n_2 - m_2n_1,\ n_1l_2 - n_2l_1,\ l_1m_2 - l_2m_1$ होंगे।

Ams. माना रेखा L_1 के अनुदिश इकाई सदिश $\hat{n}_1$ तथा रेखा L_2 के अनुदिश $\hat{n}_2$ है तब

$\hat{n}_1 = \ell_1\hat{i} + m_1\hat{j} + n_1\hat{k}$

$\hat{n}_2 = \ell_2\hat{i} + m_2\hat{j} + n_2\hat{k}$



माना रेखा L_1 और L_2 के लम्बवत् रेखा L के अनुदिश इकाई सदिश $\hat{n}$ है तब $\hat{n} = \hat{n}_1 \times \hat{n}_2$

$$\hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

$\hat{n} = \hat{i}(m_1n_2 - m_2n_1) - \hat{j}(\ell_1n_2 - n_1\ell_2) + \hat{k}(\ell_1m_2 - \ell_2m_1)$

$\hat{n} = \hat{i}(m_1n_2 - m_2n_1) + \hat{j}(\ell_1n_2 - n_1\ell_2) + \hat{k}(\ell_1m_2 - \ell_2m_1)$

रेखा L वे दिक् कोसाइन $m_1n_2 - m_2n_1,\ n_1\ell_2 - \ell_1n_2,\ \ell_1m_2 - \ell_2m_1$ है।

अध्याय – 12
रैखिक प्रोग्रामन

अंकभार (4)

1. निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $z = 5x + 3y$ का आलेखीय विधि से अधिकतमीकरण कीजिए

$5x + 2y \le 10, 3x + 5y \le 15, x \ge 0, y \ge 0$

हल :– दिए व्यवरोध

$5x + 2y \le 10$ ———————— व्यवरोध (1)

$3x + 5y \le 15$ ————————व्यवरोध (2)

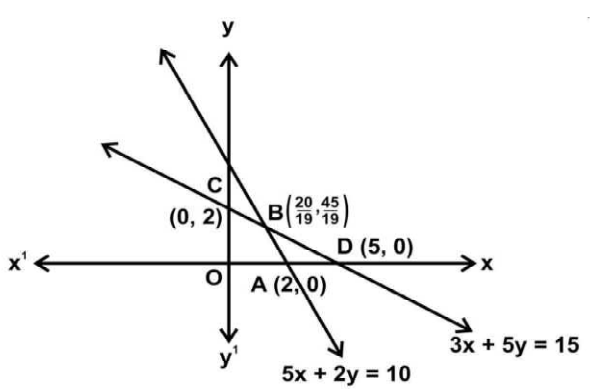
$x \ge 0, y \ge 0$ ———————— व्यवरोध (3)

व्यवरोध (1) से समीकरण $5x + 2y = 10$ या $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ तथा मूल बिन्दु (0, 0) $0 < 10$ संतुष्ट करता है।

व्यवरोध (2) से समीकरण $3x + 5y = 15$ या $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$

तथा मूल बिन्दु (0, 0), $0 < 15$ संतुष्ट करता है।

व्यवरोध (1), (2) व (3) के आलेखों से परिबद्ध क्षेत्र OABC सुसंगत क्षेत्र है।



कोणीय बिन्दुओं के संगत Z के मान

A (2, 0) तब $Z = 5(2) + 3(0) = 10$

$B\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ तब $Z = 5 \times \frac{20}{19} + 3 \times \frac{45}{19} = \frac{235}{19}$ ——— अधिकतम

$C(0,2)$ तब $Z = 5(0) + 3(2) = 6$

अतः– बिन्दु $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ पर Z का अधिकतम मान $\frac{235}{19}$ प्राप्त होता है।

2. निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 5y$ का आलेखीय विधि से न्यूनत्तमीकरण कीजिए–

$x + 3y \ge 3, \ x + y \ge 2, \ x, y \ge 0$

हलः– दिए व्यवरोध $x + 3y \ge 3$ ——— व्यवरोध (1)

$x + y \ge 2$ ———— व्यवरोध (2)

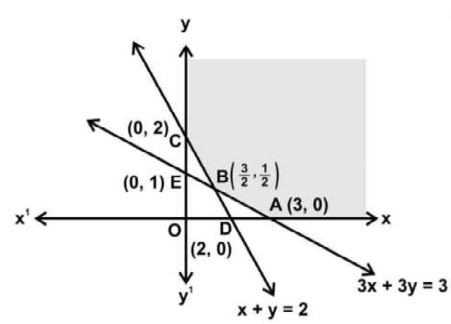
$x \ge 0, y \ge 0$ ———— व्यवरोध (3)

व्यवरोध (1) से समीकरण $x + 3y = 3$ या $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 1$

तथा मूल बिन्दु (0, 0), $0 > 3$ संतुष्ट नहीं करता है।

व्यवरोध (2) से समीकरण $x + y = 2$ या $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$ तथा मूल बिन्दु $(0,0)$ $0 > 2$ संतुष्ट नहीं करता है।

व्यवरोध (1), (2) व (3) के आलेखों से अपरिबद्ध क्षेत्र अर्थात् सुसंगत क्षेत्र (छायांकित) दिखाया गया है।



कोणीय बिन्दुओं के संगत Z के मान

A (3, 0) तब $Z = 3(3) + 5(0) = 9$

$B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ तब $Z = 3\left(\frac{3}{2}\right) + 5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{14}{2} = 7$ ———— न्यूनतम

$C(0,2)$ तब $Z = 3(0) + 5(2) = 10$

अतः– बिन्दु $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ पर Z का न्यूनतम मान 7 प्राप्त होता है।

3. निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 9y$ का रैखिक प्रोग्रामन के ग्राफीय विधि द्वारा न्यूनतमीकरण व अधिकतमीकरण कीजिए–

$x + 3y \le +60$

$x + y \ge 10$

$x \le y$

$x \ge 0,\ y \ge 0$

हल :— दिए व्यवरोध

$x + 3y \le +60$ ——— व्यवरोध (1)

$x + y \ge 10$ ——— व्यवरोध (2)

$x \le y$ या $x - y \le 0$ ——— व्यवरोध (3)

$x \ge 0, y \ge 0$ ——— व्यवरोध (4)

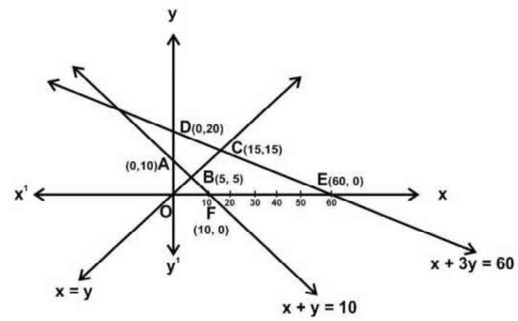
व्यवरोध (1) से समीकरण $x + 3y = 60$ या $\frac{x}{60} + \frac{y}{20} = 1$

व्यवरोध (2) से समीकरण $x + y = 10$ या $\frac{x}{10} + \frac{y}{10} = 1$

तथा मूल बिन्दु (0, 0) असमिका $x + y > 10, 0 > 10$ को संतुष्ट नहीं करता है।

व्यवरोध (3) से समीकरण $x = y$ तथा बिन्दु (1, 0), असमिका $x - y < 0,\ 1 < 0$ को संतुष्ट नहीं करता है।

असमिका (व्यवरोध) 1, 2, 3, व 4 के आलेखों से परिबद्ध क्षेत्र ABCD सुसंगत क्षेत्र है।



कोणीय बिन्दुओं के संगत Z के मान—

A(0, 10) पर $Z = 3(0) + 9\,(10) = 90$

B (5, 5) पर $Z = 3(5) + 9(5) = 60$ ——— न्यूनतम

C (15, 15) पर $Z = 3\,(15) + 9\,(15) = 180$ ——अधिकतम

D (0, 20) पर $Z = 3\,(0) + 9\,(20) = 180$ ——— अधिकतम

अतः— सुसंगत क्षेत्र बिन्दु B (5, 5) पर Z का न्यूनतम मान 60 है। तथा अधिकतम मान 180 दो बिन्दुओं C (15, 15) व D (0, 20) है। व CD पर स्थित प्रत्येक बिन्दु पर भी अधिकतम मान 180 है।

अध्याय – 13
प्रायिकता

अंकभार (1 + 1 + 2 + 3 = 7)

1. एक लीप वर्ष में 53 मंगलवार आने की प्रायिकता है –
(1) 1/7 (2) 2/7
(3) 3/7 (4) 0

2. यदि A और B दो घटनाएं इस प्रकार है कि $P(A|B) = P(B|A) \neq 0$ तब
(1) $A \subset B$ (2) $A = B$
(3) $A \cap B = \phi$ (4) $P(A) = P(B)$

3. $P(B) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.32$ तो $P\left(\frac{A}{B}\right) = ?$
(1) $\frac{16}{25}$ (2) $\frac{32}{25}$
(3) $\frac{5}{32}$ (4) $\frac{25}{32}$

4. दो घटनाओं A और B को परस्पर स्वतंत्र कहते है, यदि
(1) A और B परस्पर अपवर्जी है
(2) P(A'B') = [1-P(A)][1-P(B)]
(3) P(A) = P(B)
(4) P(A) + P(B) = 1

5. A द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। एक सिक्का उछाला जाता है तथा A बताता है कि चित प्रदर्शित हुआ। वास्तविक रूप में चित प्रकट होने की प्रायिकता है–
(1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{1}{2}$
(3) $\frac{1}{5}$ (4) $\frac{2}{5}$

6. यदि A और B ऐसी घटनाएं है कि $A \subset B$ तथा $P(B) \neq 0$ तो निम्न में से कौन ठीक है–
(1) $P(A|B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ (2) $P(A|B) < P(A)$
(3) $P(A|B) \geq P(A)$ (4) इनमें से कोई नहीं

7. यदि A और B दो ऐसी घटनाएं है कि $P(A) \neq 0$ और $P(B|A) = 1$ है, तो
(1) $A \subset B$ (2) $B \subset A$
(3) $B = \phi$ (4) $A = \phi$

8. यदि $P(A|B) > P(A)$, तब निम्न में से कौन सही है।
(1) $P(A|B) < P(B)$ (2) $P(A \cap B) < P(A).P(B)$
(3) $P(B|A) > P(B)$ (4) $P(B|A) = P(B)$

9. यदि A और B ऐसी दो घटनाएं है कि–
$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A)$, तब
(1) P(B|A) = 1 (2) P(A|B)=1
(3) P(B|A)=0 (4) P(A|B)=0

10. यदि $P(E) = 0.35$ और $P(E \cup F) = 0.6$ है तथा E एवं F स्वतंत्र घटनाएं है तब P(F) का मान है?
(1) $\frac{5}{13}$ (2) $\frac{7}{13}$
(3) $\frac{9}{13}$ (4) $\frac{11}{13}$

11. यदि $P(A) = \frac{3}{5}$ एवं $P(B) = \frac{1}{5}$ तथा A एवं B परस्पर अपवर्जी घटनाएं है तो $P(A \cup B)$ का मान है:–
(1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{1}{5}$
(3) $\frac{4}{5}$ (4) $\frac{3}{25}$

12. यदि $P(A) = 0.8$ और $P(B) = 0.5$ तो $P(A \cap B)$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि $P(B|A)$ का मान 0.4 हो।
(1) 0.20 (2) 0.40
(3) 0.32 (4) 0.36

13. निश्चित घटना की प्रायिकता होती है?
(1) 0 (2) 1
(3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{3}$

-: Answer :-

1-2, 2-4, 3-1, 4-2, 5-1, 6-3, 7-1, 8-3, 9-2, 10-1, 11-3, 12-3, 13-2

भाग–ब

14. एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए –

Sol. माना E = संख्या 4 का न्यूनतम एक बार आना

F = संख्याओं का योग 6 होना।

$E = \{(4, 1), (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6) (1, 4) (2, 4) (3, 4) (5, 4) (6, 4)\}$

$F = \{(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1)\}$

$E \cap F = \{(2, 4) (4, 2)\}$

कुल परिणाम = $6 \times 6 = 36$

$P(F) = \frac{5}{36}, \quad P(E \cap F) = \frac{2}{36}$

अतः $P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$

15. यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{12}$ एवं $P(B/A) = \frac{1}{5}$ है तो $P(A \cup B) = ...$ होगा।

हलः– प्रश्नानुसार $2P(A) = P(B) = \frac{5}{12}$

अतः– $2P(A) = \frac{5}{12} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{24}$

$P(B) = \frac{5}{12}$

एवं $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{5}$

$= P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

$= \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{24}$

अतः– $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{5}{24} + \frac{5}{12} - \frac{1}{24}$

$= \frac{5 + 10 - 1}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$

अतः– $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$ होगा।

16. यदि $P(A) = \frac{1}{2}$ एवं $P(B) = \frac{3}{4}$ तथा A तथा B स्वतंत्र घटनाएं है तो P(A नहीं और B नहीं) का मान .... होगा।

हलः– $\therefore P(A) = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore P(B) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

= A एवं B स्वतंत्र घटनाएं है अतः A' एवं B' भी स्वतंत्र घटनाएं होगी।

अतः– $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$

$P(A' \cap B')) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

$P(A' \cap B') = \frac{1}{8}$

17. एक परिवार में दो बच्चे है। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है?

Ans. माना कि b लड़का एवं g लड़की को निरूपित करते है। तो परीक्षण का प्रतिदर्श सभष्टि है–

$S = \{(b, b), (b, g), (g, b), (g,g)\}$

माना कि E एवं F क्रमशः निम्न घटनाओं को दर्शाते है–

E : दोनों बच्चे लड़के है।

F : बच्चों में से कम से कम एक लड़का है।

तब $E = \{(b,b)\}, F = \{(b, b), (g, b), (b, g)\}$

अब $E \cap F = \{(b,b)\}$

अतः $P(F) = \frac{3}{4}$ एवं $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

इसलिए $P(E | F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

18. यदि दिया गया है कि दोनों पासों को फैंकने पर प्राप्त संख्याएं भिन्न–भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Ans. दो पासों को उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि $S = 6\times6 = 36$

माना कि घटना A = दो संख्याओं का योग 4 है।

$A = \{(1, 3), (2, 2), (3,1)\}$

अतः $n(A) = 3$

दो पासों की उछाल में समान संख्या वाले परिणाम

$= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5,5), (6,6)\}$

घटना B = पासों पर उछाल पर भिन्न–भिन्न अंक प्राप्त होगा

$= 36 - 6 = 30$

$n|B| = 30$

$A\cap B = \{(1,3),(3,1)\}$

तब $n(A\cap B) = 2$, $P(A\cap B) = \frac{2}{36}$

$P(A) = \frac{3}{36}, P(B) = \frac{30}{36}$

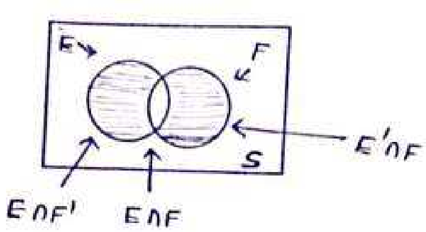
अतः $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

119. सिद्ध कीजिए कि यदि E और F दो स्वतंत्र घटनाएं है तो E और F' भी स्वतंत्र होगी।

Ans. क्योंकि E एवं F स्वतंत्र घटनाएं है इसलिए

$P(E\cap F) = P(E).P(F)$ 1

उपरोक्त वेन आरेख से स्पष्ट है कि $(E\cap F)$ तथा $(E\cap F')$ परस्पर अपवर्जी घटनाऐं है।



साथ ही $E = (E\cap F)\cup(E\cap F')$

अतः $P(E) = P(E\cap F) + P(E\cap F')$

$P(E\cap F') = P(E) - P(E).P(F)$ (समीकरण 1 से)

$P(E\cap F') = P(E)[1 - P(F')]$

$P(E\cap F') = P(E).P(F')$

अतः E और F' स्वतंत्र घटनाएं है।

20. मान ले E तथा F दो इस प्रकार की घटनाएं है कि $P(E) = \frac{3}{5}, P(F) = \frac{3}{10}$ एवं $P(E\cap F) = \frac{1}{5}$ तब क्या E एवं F स्वतंत्र है।

हलः– दिया गया है कि $P(E) = \frac{3}{5}$

तथा $P(F) = \frac{3}{10}$

चुकिं $P(E)\times P(F) = \frac{3}{5}\times\frac{3}{10} = \frac{9}{50}$

तथा $P(E\cap F) = \frac{1}{5}$

$= P(E\cap P) \neq P(E)\cdot P(F)$

अतः E तथा F स्वतंत्र नहीं है।

21. एक पासे को एक बार उछाला जाता है घटना 'पासे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्व्य है' को E से और पासे पर प्राप्त संख्या सम है को F से निरूपित किया जाए तो बताएं क्या घटनाएं E एव F स्वतन्त्र हैं

हलः– हम जानते है कि इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि है : $S = \{1,,2,3,4,5,6\}$

अब $E = \{3,6\}$, $F = \{2,4,6\}$ एवं $E\cap F = \{6\}$

तब $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ एवं $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ तथा $P(E\cap F) = \frac{1}{6}$

स्पष्टता $P(E\cap F) = P(E)\cdot P(F)$

अतः E तथा F स्वतंत्र घटनाएं है।

भाग–स

22. 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंट गई गड्डी में से एक के बाद एक तीन पते बिना प्रतिस्थापित किए निकाले गए। पहले दो पत्तों का बादशाह और तीसरे का इक्का होने की क्या प्रायिकता है?

Ans. मान लें कि K घटना निकाला गया पता बादशाह है को और A घटना निकाला गया पता इक्का है को व्यक्त करते हैं। स्वष्टतया हमें P(KKA) ज्ञात करना है।

अब $P(K)=\frac{4}{52}$

साथ ही $P(K|K)$ यह ज्ञात होने पर कि पहले निकाला गया पता बादशाह है पर दूसरे पते का बादशाह होने की प्रायिकता को दर्शाता है। अब गड्डी में $(52-1)=51$ पत्ते है जिनमें तीन बादशाह है

इसलिए $P(K|K)=\frac{3}{51}$

अंततः $P(A|KK)$ तीसरे निकाले गए पते का इक्का होने की सप्रतिबंध प्रायिकता है जब कि हमें ज्ञात है कि दो बादशाह पहले ही निकाले जा चुके हैं। अब गड्डी में 50 पत्ते रह गए हैं

इसलिए $P(A|KK)=P(A|KK)=\frac{4}{50}$

प्रायिकता के गुणन नियम द्वारा हमें प्राप्त होता है कि

$P(KKA)=P(K)P(K|K)P(A|KK)$

$=\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}\times\frac{4}{50}=\frac{2}{5525}$

23. तीन अभिन्न डिब्बे I, II और III दिए गए हैं जहां प्रत्येक में दो सिक्के हैं। डिब्बे I में दोनों सिक्के सोने के है, डिब्बे II में दोनों सिक्के चांदी के हैं और डिब्बे III में एक सोने और एक चांदी का सिक्का है। एक व्यक्ति यादृच्छया एक डिब्बा चुनता है और उसमें से यादृच्छया एक सिक्का निकालता है। यदि सिक्का सोने का है, तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का ही है?

Ans. मान ले E_1, E_2 और E_3 क्रमशः डिब्बे I, II और III के चयन को निरूपित करते है

तब $P(E_1)=P(E_2)=P(E_3)=\frac{1}{3}$

साथ ही मान लें A घटना 'निकाला गया सिक्का सोने का है' को दर्शाता है।

तब $P(A|E_1)$ = P (डिब्बे I से सोने का सिक्का निकलना)

$=\frac{2}{2}=1$

$P(A|E_1)$ = P (डिब्बे II से सोने का एक सिक्का निकलना) = 0

$P(A|E_3)$ = P (डिब्बे III से सोने का सिक्का निकलना) = $\frac{1}{2}$

अब डिब्बे में दूसरा सिक्का भी सोने का होने की प्रायिकता = निकाला गया सोने का सिक्का डिब्बे I से होने की प्रायिकता = $P(E_1|A)$

अब बेज–प्रमेय द्वारा

$$P(E_1|A)=\frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

24. एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है। इस की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है।

Ans. मान लीजिए कि E व्यक्ति द्वारा पासे को उछाल कर यह बताने की कि उस पर आने वाली संख्या 6 है की घटना है। मान लीजिए कि S_1 पासे पर संख्या 6 नहीं आने की घटना हैं। तब

$P(S_1)$ = संख्या 6 आने की घटना की प्रायिकता $=\frac{1}{6}$

$P(E|S_1)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे कि संख्या 6 आई है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है, की प्रायिकता

= व्यक्ति द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $=\frac{3}{4}$

$P(E|S_2)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने पर कि पासे पर संख्या 6 आई है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 नहीं है, की प्रायिकता

= व्यक्ति द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

अब बेज प्रमेय द्वारा

$P(S_1|E)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने की प्रायिकता कि संख्या 6 प्रकट हुई है, जब वास्तव में संख्या 6 है।

$$=\frac{P(S_1)P(E|S_1)}{P(S_1)P(E|S_1)+P(S_2)P(E|S_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{8}\times\frac{25}{8}=\frac{3}{8}$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $\frac{3}{8}$ है।

25. एक विशेष समस्या को A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएं क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। यदि दोनों स्वतंत्र रूप से,

समस्या हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि –
(i) समस्या हल हो जाती है।
(ii) उनमें से तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है।

Ans. A और B द्वारा समस्या हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ और न हल करने की प्रायिकता क्रमशः $1-\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{2}$ और $1-\frac{1}{3}$ या $\frac{2}{3}$ है।

(i) समस्या हल न होने की प्रायिकता $=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ दोनों की समस्या हल होने की प्रायिकता $=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(ii) यदि समस्या के हल होने को S और न हल होने को F निरूपित करें तो तथ्यतः उस समस्या को हल SF + FS ढंग से हल किया जाएगा।

इसकी प्रायिकता $=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$

26. थैले 1 में 3 लाल तथा 4 काली गेंदे हैं तथा थैला 2 में 4 लाल और 5 काली गेंदे हैं। एक गेंद को थैला 1 से थैला 2 में स्थानान्तरित किया जाता है और तब एक गेंद थैले 2 से निकाली जाती है। निकाली गई गेंद लाल रंग की है। स्थानान्तरित गेंद की काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Ans. थैले 1 में 3 लाल और 4 काली गेंदे है।
तथा थैले 2 में 4 लाल और 5 काली गेंदें है।
मान लीजिए घटना E_1 तथा E_2 थैले 1 से लाल गेंद और काली गेंद निकालने की हों, तब

$\therefore \quad P(E_1)=\frac{3}{7}, P(E_2)=\frac{4}{7}$

घटना A : लाल रंग की गेंद निकालना
एक लाल गेंद थैले 1 से निकाल कर 2 में रख दी गई। इस प्रकार थैले 2 में 5 लाल और 5 काली गेंदें हो गई।

$\therefore \quad P(A/E_1)=\frac{5}{10}$

एक काली गेंद थैले 1 से निकालकर थैला 2 में रख दी। इस प्रकार दूसरे थैले में 4 लाल और 6 काली गेंदे हैं।

$\therefore \quad P(A/E_2)=\frac{4}{10}$

बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/A)=\frac{P(E_2)P(A/E_2)}{P(E_1)P(A/E_1)+P(E_2)P(A/E_2)}$$

$$=\frac{\frac{4}{7}\times\frac{4}{10}}{\frac{3}{7}\times\frac{5}{10}+\frac{4}{7}\times\frac{4}{10}}$$

$$=\frac{16}{15+16}$$

$$=\frac{16}{31}$$

शेखावाटी मिशन मॉडल पेपर 1

विषयः गणित (Mathematics)

कक्षा – 12

समय : 3 घण्टे 15 मिनट पूर्णांक : 80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

GENERAL INSTRUCTION TO THE EXAMINEES :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
   Candidate must write first his/her Roll No. on the question paper compulsorily.
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य है।
   All the question are compulsory.
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर पुस्तिका में ही लिखें।
   Write the answer to each question in the given answer book only.
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
   For questions having more than one part, the answers to those parts are to be written together in continuity.
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
   Write down the serial number of the question before attempting it.
6. प्रश्न पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तरण में किसी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।
   If there is any error/differencc/Contradiction in Hindi & English versions of thc question paper, the question of Hindi version should be treated valid.
7. प्रश्न क्रमांक 14 से 20 में आन्तरिक विकल्प है।
   There are internal choices in Question No. 14 to 20,

खण्ड – अ

1. बहुविकल्पीय प्रश्न (i से xviii)

(i) समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ में $B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ एक सम्बन्ध परिभाषित है तब R है –

(1) स्वतुल्य, सममित (2) केवल स्वतुल्य

(3) स्वतुल्य, सक्रांमक (4) स्वतुल्य, सममित, सक्रांमक

(ii) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान है –

(1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$

(3) $-\frac{\pi}{4}$ (4) $-\frac{3\pi}{4}$

(iii) निम्न में विकर्ण अदिश आव्यूह है –

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

(iv) सारणीक $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$ का मान होगा –

(1) 1 (2) -1
(3) 0 (4) 2

(v) आव्यूह समीकरण $AX = B$ में A एक वर्ग आव्यूह है तब यदि $|A| = 0$ तथा $(\text{adj } A)B \neq 0$ तब समीकरण निकाय का हल होगा।
(1) अद्वितीय हल (2) अनन्त हल
(3) कोई हल नहीं (4) इनमें से कोई नहीं

(vi) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x>1 \\ 2 & x \le 1 \end{cases}$ हो, तो फलन f के लिए असत्य है?
(1) $x = 1$ पर फलन संतत है। (2) $x = 2$ पर फलन संतत है।
(3) $x = 0$ पर फलन संतत है। (4) $x = -1$ पर फलन असतत् है।

(vii) $y = \cos(\sin x)$ का अवकलज है –
(1) $\sin(\sin x)$ (2) $\sin(\cos x)$
(3) $-\sin(\sin x)$ (4) $-\cos x \sin(\sin x)$

(viii) $|\sin 2x| + 4$ का उच्च्तम मान है –
(1) 0 (2) 4
(3) 5 (4) 3

(ix) $\int \sin mx \, dx$ का मान है।
(1) $\frac{\cos mx}{m} + c$ (2) $\frac{-\cos mx}{m} + c$
(3) $m \cos mx + c$ (4) $-m \cos mx + c$

(x) वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ का x-अक्ष से ऊपर का क्षेत्रफल है –
(1) π (2) 2π
(3) 4π (4) 8π

(xi) समीकरण $\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$ का हल है –
(1) $x + \tan y = c$ (2) $\tan y = x + c$
(3) $\sin x + y = c$ (4) $\sin y - x = c$

(xii) यदि सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $6\hat{i} - 4p\hat{j} + q\hat{k}$ समान्तर हो, तो p तथा q के मान है –
(1) -1, -2 (2) -1, 2
(3) 1, 2 (4) 1, -2

(xiii) यदि $\vec{a} + \vec{b} = \hat{i}$ तथा $\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ हो, तो $|\vec{b}|$ का मान है –
(1) $\sqrt{14}$ (2) $\sqrt{17}$
(3) $\sqrt{12}$ (4) $\sqrt{9}$

(xiv) बिन्दु (1, -1, 0) से होकर जाने वाली तथा y-अक्ष के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण है –

(1) $\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$ (2) $\vec{r} = \hat{i} - \hat{j}(1-\lambda)$

(3) $\vec{r} = \hat{i} - \hat{j}(1+\lambda)$ (4) None

(xv) $(\hat{i} \times \hat{j}) \cdot \hat{j} + (\hat{j} \times \hat{i}) \cdot \hat{k}$ का मान है –

(1) 0 (2) -1

(3) 1 (4) 2

(xvi) एक पासे ओर एक सिक्के को एक साथ उछाला जाता है तब कुल कितने परिणाम होगे –

(1) 6 (2) 12

(3) 8 (4) 36

(xvii) एक पासे को एक बार उछालने पर सम अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता है –

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{3}$ (4) 0

(xviii) A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हो, तो $p(A \cup B)$ का मान होगा यदि $p(A) = \frac{1}{2} p(B) = \frac{1}{3}$

(1) 0 (2) 1

(3) $\frac{5}{6}$ (4) $\frac{1}{6}$

2. रिक्त स्थानों की पुर्ति करो [प्रश्न (i) से (vi)]

(i) f (x) = 2x + 5 तब f (-1) का मान .... होगा।

(ii) यदि A और B व्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो $(AB)^{-1}$ = ... होता है।

(iii) अन्तराल [1, 5] में $f(x) = x^2 - 4x + 8$ द्वारा प्रदत फलन का निरपेक्ष उच्चतम मान .... है।

(iv) $\int e^{-3\log_e x} dx$ का मान .... होगा।

(v) तीन कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या .... होती है।

(vi) एक सदिश जिसके प्रारम्भिक और अन्तिम बिन्दु संपाती हो........................... कहलाता है।

3. अतिलघुतरात्मक प्रश्न (i से vi)

(i) यदि आव्यूह y, p, w की कोटिया क्रमशः 3 × k, p × k, n × 3 हो, तो py + wy की कोटि ज्ञात करों।

(ii) $A = \begin{bmatrix} k & 8 \\ 4 & 2k \end{bmatrix}$ एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है तब k का मान ज्ञात करों।

(iii) f (x) = x sin x तब $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ज्ञात करों।

(iv) y = log cos x तब $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करों।

(v) $f(x) = e^x$ हो, तो सिद्ध करो f (x), R पर हमेशा वर्धमान फलन है।

(vi) $f(x) = x^3 - 3x$ के ह्रासमान का अन्तराल ज्ञात करों।

(vii) $\int \frac{2-\sin x}{\cos^2 x}dx$ का मान ज्ञात करों।

(viii) दीर्घवृत $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ की दीर्घ अक्ष की लम्बाई ज्ञात करो।

(ix) समीकरण $\frac{dy}{dx}=4xy^2$ का व्यापक हल ज्ञात करो।

(x) $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{b}=-2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ हो, तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के मध्य बिन्दु का सदिश ज्ञात करो।

(xi) p का मान ज्ञात करो यदि सदिश $2\hat{i}+p\hat{j}+\hat{k}$ तथा $-4\hat{i}-6\hat{j}+26\hat{k}$ परस्पर लम्ब है।

(xii) 52 पत्तों की एक गड्डी से बिना प्रतिस्थापन 'दो लाल पान' के पते निकालने की प्रायिकता ज्ञात करों।

खण्ड (ब)

4. सिद्ध करो वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में सम्बन्ध $R=\{(a,b) : a\le b^2\}$ न तो स्वतुल्य है और न सममित।

5. $\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+\sec^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)=x$ हो, तो x का मान ज्ञात करो।

6. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 6 & 7\end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो $(A+A^T)$ एक सममित आव्यूह है।

7. सारणिकों का प्रयोग करके (1, 2) और (3, 6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. यदि $x^2+xy+y^2=100$ तब $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो।

9. यदि $x=a(\theta+\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$ तब $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करो।

10. एक साबुन के गोलीय बुलबुले की त्रिज्या 0.3 सेमी/सैकण्ड की दर से बढ़ रही है। तब इसके पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि दर ज्ञात करो यदि त्रिज्या 7 सेमी है।

11. वक्र $y=\sin x$, x-अक्ष तथा कोटि $x=\frac{\pi}{2}$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात करो।

12. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx$ का मान ज्ञात करो।

13. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी सलग्न भुजाएँ सदिश $\vec{a}=\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ और $\vec{b}=2\hat{i}-7\hat{j}+\hat{k}$ द्वारा निर्धारित हो।

खण्ड – स

14. $\int \frac{3x\ dx}{1+2x^4}$ का मान ज्ञात करो।

OR

$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$ का मान ज्ञात करो।

15. अवकल समीकरण $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x$ का हल ज्ञात करो।

OR

अवकल समीकरण $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=1$ का हल ज्ञात करों।

16. रेखायुग्म $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{4}$ तथा $\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{1}$ के मध्य कोण ज्ञात करो।

OR

सरल रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात करों जो एक बिन्दु $(2, -1, 4)$ से गुजरती है तथा सदिश $\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ के समान्तर है। इस रेखा को कार्तीय रूप में परिवर्तित कीजिए।

17. एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई सँख्याओं का योग 6 पाया गया। तब संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

OR

एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और कहता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात करो कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है।

खण्ड–द

18. $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ का मान ज्ञात करों।

OR

$\int_{0}^{\pi/12}\cos 6x\,\sqrt{1+\sin 6x}\,dx$

19. रेखाओं $\vec{r}=\hat{i}+\hat{j}+\lambda(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ तथा $\vec{r}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}+\mu(3\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दुरी ज्ञात करो।

OR

बिन्दु $(1, 2, -4)$ से जाने वाली और दोनों रेखाओं $\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{-16}$ तथा $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$ पर लम्ब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात करों।

20. आलेखीय विधि द्वारा निम्न LPP का न्यूनतमीकरण कीजिए–

$Z = 5x + y$

व्यवरोध $3x+5y \geq 15$

$5x+2y \leq 10$

$x, y \geq 0$

OR

निम्न LPP का ग्राफ द्वारा हल कीजिए–

व्यवरोधो $x+y \leq 6$

$x \geq 2$

$y \leq 3$

$x, y \geq 0$

के अन्तर्गत $Z = 2x+3y$ का अधिकतमीकरण करों।

शेखावाटी मिशन मॉडल पेपर 2

विषयः गणित (Mathematics)

कक्षा – 12

समय : 3 घण्टे 15 मिनट पूर्णांक : 80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

GENERAL INSTRUCTION TO THE EXAMINEES :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
   Candidate must write first his/her Roll No. on the question paper compulsorily.
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य है।
   All the question are compulsory.
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर पुस्तिका में ही लिखें।
   Write the answer to each question in the given answer book only.
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
   For questions having more than one part, the answers to those parts are to be written together in continuity.
5. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
   Write down the serial number of the question before attempting it.
6. प्रश्न पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तरण में किसी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।
   If there is any error/differencc/Contradiction in Hindi & English versions of thc question paper, the question of Hindi version should be treated valid.
7. प्रश्न क्रमांक 14 से 20 में आन्तरिक विकल्प है।
   There are internal choices in Question No. 14 to 20,

खण्ड – अ

1. बहुविकल्पीय प्रश्न (i से xviii)

(i) यदि A व B दो अरिक्त समुच्चय है जहाँ A में m तथा B में n अवयव है तो A से B में परिभाषित हो सकने वाले फलनों की संख्या होगी–

(1) $|\underline{n}$ (2) $|\underline{m}$

(3) n^m (4) m^n

(ii) $\cos^{-1}(2x - 3)$ का प्रान्त है –

(1) (-1, 1) (2) (1, 2)

(3) [-1, 1] (4) [1, 2]

(iii) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ एक स्तंभ आव्यूह होगा यदि –

(1) $m > 1$ (2) $m = 1$

(3) $n > 1$ (4) $n = 1$

(iv) यदि A एक n क्रम का वर्ग आव्यूह है तो |adj A| है –

(1) $|A|^{n-1}$ (2) $\frac{1}{|A|}$

(3) A^{n-1} (4) $\frac{1}{|A|^{n-1}}$

(v) $\begin{vmatrix} k & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$ तो k का मान होगा –

(1) 4 (2) 5

(3) 6 (4) 0

(vi) e^{2x} का e^x के सापेक्ष अवकलज है –

(1) e^x (2) $2e^x$

(3) $2e^{2x}$ (4) e^{-x}

(vii) वृत्त की त्रिज्या $r = 6$ cm पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है –

(1) 10π (2) 12π

(3) 12 (4) 8π

(viii) $f(x) = \begin{cases} 2x-5 \;; & \text{यदि } x \le 3 \\ 2k & \text{यदि } x > 3 \end{cases}$, x = 3 पर संतत है तो k का मान होगा –

(1) 1 (2) 2

(3) 1/2 (4) 1/3

(ix) $\int_0^1 (\sin^{-1} x + \cos^{-1} x)dx$ का मान होगा –

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) π

(3) $\frac{\pi^2}{4}$ (4) 0

(x) $y^2 = 4x$, y-अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है –

(1) 2 (2) $\frac{9}{4}$

(3) $\frac{9}{2}$ (4) $\frac{9}{8}$

(xi) चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है –

(1) 0 (2) 2

(3) 3 (4) 4

(xii) $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$ का परिमाण है –

(1) 3 (2) 1

(3) -1 (4) 2

(xiii) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$ और $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$ हो, तो $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के बीच का कोण है –

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) 0

(3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{3}$

(xiv) $|\vec{a}|=2.\ |\vec{b}|=3$ और $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ तो $|\vec{a}-\vec{b}|$ होगा –

(1) $\sqrt{5}$ (2) 5

(3) 0 (4) 4

(xv) (x, y, z) की z अक्ष से लम्बवत् दूरी है –

(1) 0 (2) $\sqrt{x^2+y^2}$

(3) x + y (4) 1

(xvi) दो घटनाएँ A व B अपवर्जी होगी यदि –

(1) $p(A\cap B)=0$ (2) $p(A\cap B)=p(A)\ p(B)$

(3) $p(A\cup B)=0$ (4) $p(A\cup B)=p(A)\ p(B)$

(xvii) यदि $p(A)=\frac{1}{2},\ p(B)=0$ तो $p\left(\frac{A}{B}\right)$ है –

(1) 0 (2) $\frac{1}{2}$

(3) 1 (4) अपरिभाषित

(xviii) पासे को एक बार उछालने पर संख्या 2 का अपवर्त्य आने की प्रायिकता होगी –

(1) 1/2 (2) 0

(3) 1 (4) 1/6

2. रिक्त स्थान की पूर्ति करें (i से vi तक)

(i) A = {1, 2} तथा B = {3, 4} है तो A और B में सम्बंधों की संख्या .... है।

(ii) $\begin{vmatrix}3 & 3\\ x & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & x\\ 1 & 1\end{vmatrix}$ तो x का मान .... है।

(iii) |x| का न्यूनतम मान .... है।

(iv) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ का मान .... है।

(v) $y^{111}+y^2+\sin y$ की घात .... है।

(vi) $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ और $\vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}$ तो $|\vec{a}\times\vec{b}|$ का मान .... है।

3. अतिलघूरात्मक (i से xiii)

(i) $[x\ -3]\begin{bmatrix}2x\\ 6\end{bmatrix}=0$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 8 & 6 & 3\\ 9 & 5 & 4\end{vmatrix}$ में अवयव 6 का उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

(iii) सिद्ध किजिए कि लघुगणकीय फलन $(0,\ \infty)$ में वर्धमान फलन है।

(iv) $y=\log_a x$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करों।

(v) फलन $\cos(\sin x)$ का अवकलज ज्ञात करों।

(vi) $f(x) = |\sin 4x + 3|$ का उच्चतम व निम्नतम मान ज्ञात कीजिए –

(vii) $\int \cos^2 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए–

(viii) $y^2 = 4ax$ की नाभिलम्ब की लम्बाई लिखिए।

(ix) $y = Ae^x + Be^{-x}$ की अवकल समीकरण ज्ञात करों।

(x) सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j}$ का सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j}$ पर प्रक्षेप ज्ञात करों।

(xi) सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ के दिक्–कोसाइन है।

(xii) $p(A) = \frac{5}{11},\ p(B) = \frac{6}{11},\ p(A \cap B) = \frac{4}{11}$ हो, तो $p\left(\frac{A}{B}\right)$ ज्ञात करों।

खण्ड ब (प्रत्येक प्रश्न – 2 अंक)

4. सिद्ध कीजिए $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \rightarrow R$ एकैकी नहीं है।

5. $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right),\ x > 1$ को सरलतम रूप में लिखिए।

6. एक 2×2 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जिसमें $a_{ij} = \frac{i}{j}$ प्रकार से प्रदत है।

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तो दिखाइए $|2A| = 4\,|A|$

8. $\sin(\tan^{-1} e^{-x})$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए–

9. $\tan^{-1}x$ का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए।

10. कुल आय $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ से प्रदत है सीमांत आय ज्ञात कीजिए जब $x = 7$ है।

11. $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\,dx$ ज्ञात कीजिए।

12. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13. दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ और $-4\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$ सरैख है।

खण्ड स (प्रत्येक प्रश्न – 3 अंक)

14. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1 + \sin x}$ ज्ञात कीजिए–

OR

$\int \frac{\cos x}{(1 - \sin x)(2 - \sin x)} dx$ ज्ञात कीजिए।

15. बिन्दु (-2, 3) से गुजरने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2x}{y^2}$ है।

OR

अवकल समीकरण $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 6x + 4y$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए। दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = 0$

16. दिखाइए कि रेखाएँ $\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ परस्पर लंब है।

OR

रेखाओं $\vec{r}=\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ और $\vec{r}=3\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

17. एक प्रशिक्षक के पास 300 सत्य/असत्य प्रकार के आसान प्रश्न 200 सत्य/असत्य प्रकार के कठिन प्रश्न 500 बहु–विकल्पीय प्रकार के आसान प्रश्न और 400 बहु–विकल्पीय प्रकार के कठिन प्रश्न है। यदि एक प्रश्न चुना जाता है तो एक आसान प्रश्न की बहु–विकल्पीयक होने की प्रायिकता क्या होगी?

OR

52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खो जाता है शेष पत्तों से दो पत्ते निकाले जाते है जो ईंट के पत्ते है। खो गए पत्ते की ईंट होने की प्रायिकता क्या है?

खण्ड द (प्रत्येक प्रश्न – 4 अंक)

18. $\int_0^{\pi/2}\log\sin x\ dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

OR

$\int\frac{1}{1+\cot x}dx$ का मान ज्ञात करों।

19. $\vec{r}=(1-t)\hat{i}+(t-2)\hat{j}+(3-2t)\hat{k}$ और $\vec{r}=(s+1)\hat{i}+(2s-1)\hat{j}-(2s+1)\hat{k}$ रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करों

OR

रेखाएँ $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{3-z}{-2}$ और $\frac{7-7x}{3p}=\frac{5-y}{-1}=\frac{6-z}{5}$ परस्पर लंब है तो p का मान ज्ञात करो।

20. निम्न अवरोधों के अंतर्गत $z=-3x+4y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए–

$x+2y\le 8,\quad 3x+2y\le 12,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$

OR

निम्न अवरोधों के अंतर्गत $z=3x+9y$ का न्यूनतम और अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

$x+3y\le 60,\quad x+y\ge 10,\quad x\le y,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$